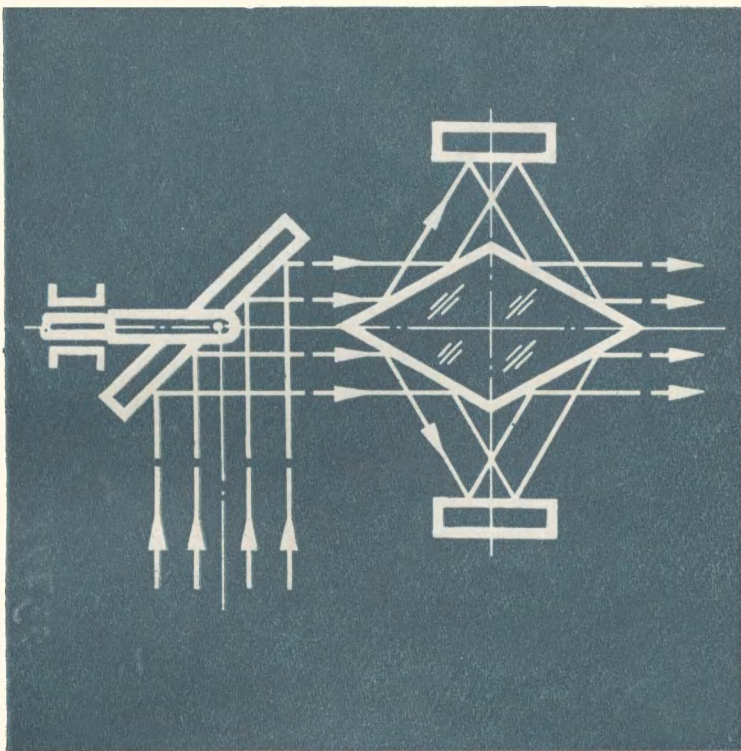




БИБЛИОТЕКА ПРИБОРОСТРОИТЕЛЯ



И. А. ГРЕЙМ

# ЗЕРКАЛЬНО- ПРИЗМЕННЫЕ СИСТЕМЫ

И. А. ГРЕЙМ



БИБЛИОТЕКА ПРИBOROCTPOИTEΛЯ



# ЗЕРКАЛЬНО- ПРИЗМЕННЫЕ СИСТЕМЫ

МОСКВА

«МАШИНОСТРОЕНИЕ»

1981



Scan AAW

ББК 34.9

Г79

УДК 535.317.2 : 681.4.02

Научный редактор д-р техн. наук И. И. Пахомов

Рецензент канд. техн. наук Б. М. Комраков

**Грейм И. А.**

Г79      Зеркально-призмённые системы. — М.: Машиностроение, 1981. — 125 с., ил. — (Б-ка приборостроителя).

35 к.

Книга содержит материалы по методам расчета зеркально-призмённых систем (ЗПС), функциональному назначению ЗПС в приборах контроля и управления, способам конструкторского анализа, синтеза и юстировки. При изложении методов расчета рассмотрены вопросы выбора того или иного из них в соответствии с конкретными задачами инженерной практики. Подробно раскрыты основные вопросы проектирования ЗПС по заданной функции действия. Книга предназначена для инженерно-технических и научных работников, специализирующихся в областях оптического приборостроения.

Г  $\frac{31305-222}{038(01)-81}$  222-81. 2706000000

ББК 34.9

6П5.8

© Издательство «Машиностроение», 1981 г.

Современное точное оптическое приборостроение все в большей мере использует призмы и системы плоских зеркал. Это объясняется прежде всего тем, что плоские зеркала не имеют aberrаций, а практически все призмы разворачиваются в плоскопараллельные пластинки, aberrации которых малы и в подавляющем числе случаев могут в расчет не приниматься, т. е. использование зеркал и призм не приводит к существенному увеличению aberrаций системы. Необходимость применения практически безабберационных оптических систем возникает в связи с непрерывно повышающимися требованиями к точности работы различных измерительных оптических приборов. Это относится в первую очередь к приборам, работающим в космосе, [32], а также к контрольным приборам, используемым в других областях техники.

С развитием оптикоэлектронных систем индикации область применения и функции зеркально-призменных систем (ЗПС) значительно расширились. На основе ЗПС создаются особо точные микрометры с широким диапазоном измерений, системы со сложной траекторией движения изображения точки и др. Можно привести множество примеров, когда рациональное использование свойств ЗПС дает лучшее по сравнению с другими системами схемное или конструктивное решение прибора. Но вместе с тем оптимальный выбор ЗПС для конкретной задачи и юстировка ее вызывают существенные трудности, обусловленные прежде всего отсутствием работ, в которых полно и подробно бы излагались вопросы расчета ЗПС в виде, удобном для инженеров-оптиков.

Подтверждением расширяющегося использования ЗПС является и значительное повышение активности в этой области изобретательства. В настоящее время ЗПС широко используют для космической измерительной техники, для решения задач пантографирования, для создания обрабатывающих систем различного рода дальнометров и высотомеров [4, 8, 11, 12, 13, 15, 20, 23], для расширения области применения зрительных труб и биноклей [21, 12, 16, 17, 28]. Рассматриваются вопросы получения новых свойств ЗПС и методов их расчета [5, 6, 7, 18, 19, 21, 28, 29] и т. п. Без преувеличения можно сказать, что дальнейшее стимулирование изобретательской мысли в области создания новых измерительных средств с широким применением различных ЗПС позволит преодолеть имеющееся расхождение между высокими требованиями к точности работы средств измерения и реальными возможностями их

создания. Только приведение ЗПС к максимальной систематизации, с предельно глубоким и всесторонним анализом всех их особенностей и соотносением их к возможностям реализации позволит широкому кругу конструкторов и исследователей значительно расширить область их использования.

Ограниченное использование конструкторами ЗПС в настоящее время объясняется тем, что, с одной стороны, их расчет в известной степени своеобразен и требует применения различных математических методов — сферической тригонометрии, векторного и векторно-матричного исчисления и развитых применительно к расчету ЗПС в последнее время методов конечного поворота твердого тела, кватернионов и бикватернионов. С другой стороны, нет достаточно подробных и удобных для применения конструкторами аналитических зависимостей, моделей и описаний свойств ЗПС с конкретными примерами их применения.

При выполнении расчетов по методам кватернионов и бикватернионов расчет сводится к вычислению оператора действия ЗС в канонической форме. По канонической форме этого оператора легко установить, как ЗС преобразует пространство. Преимущество данного метода по сравнению с другими, в частности с векторно-матричным, заключается в том, что он не связан с выбором каких-либо специальных систем координат, и поэтому в процессе вычислений не требуется пересчета результатов из одной системы координат в другую.

Целью настоящей книги является изложение современных методов расчета ЗПС, анализ преобразований пространства ЗПС получение аналитических выражений с использованием наглядных геометрических представлений, что дает исследователям и конструкторам новые средства расширения области применения ЗПС и вида решаемых задач.

В книге особое внимание уделяется трем видам преобразований пространства ЗПС: повороту, сдвигу и инверсии.

На основе этих преобразований разработаны методы эквивалентной замены сложных ЗПС их простейшими типами, причем широко использованы только два приема — вращение угловых зеркал вокруг их ребер и сдвиги и повороты зеркальных ромбов с соответствующей коррекцией их параметров. Автор стремился подчеркнуть, что между указанными преобразованиями пространства ЗПС и преобразованиями систем координат (СК) нет принципиальной разницы: тот же поворот, но обязательно вокруг одной из осей СК, тот же сдвиг из начала системы координат (без поворота) и та же инверсия — неконгруэнтность, переход от правой СК к левой и наоборот.

В книге рассмотрены и систематизированы различные математические методы, применяемые в линейных преобразованиях пространства, и указано, какими из них в каких случаях целесообразно пользоваться. Впервые в систематизированном виде представлен метод бикватернионов, развитый для анализа и синтеза ЗПС всех типов.

Аналитические методы линейных преобразований пространства, которые и представляют собой преобразования, осуществляемые ЗПС, стали развиваться с начала прошлого столетия как одна из ветвей математики применительно к решению задач небесной и прикладной механики, а впоследствии гироскопии, аналитической механики и теории механизмов.

Еще во второй половине прошлого века выдающийся английский математик Гамильтон разработал один из замечательных методов расчета линейного ортогонального преобразования пространства, названный им методом кватернионов (см. п. 1 гл. 5). Этот метод позволяет весьма просто находить операторы суммарного действия двух поворотов пространства вокруг пересекающихся осей (задача, часто решаемая в оптотехнике).

Интересно отметить, что векторная алгебра, мощный математический аппарат, который был разработан в дальнейшем, родилась именно из кватернионов. В 60-е годы прошлого века немецкий математик Кэли ввел матрицы для описания линейных преобразований пространства. В 1895 г. опубликовано выдающееся сочинение А. П. Котельникова, в котором впервые построено собственное винтовое исчисление с использованием комплексных чисел с множителем  $\omega$ , введенным Клиффордом в 1873 г. А. П. Котельников, по-видимому, одновременно с немецким геометром Э. Штуди сформулировал принцип перенесения, согласно которому все операции векторного исчисления переносятся на операции винтового исчисления [10].

Таким образом, основные математические методы линейного преобразования пространства были разработаны в прошлом веке. Применение же их для решения задач оптотехники относится ко второй половине настоящего века.

До 30-х годов настоящего века при расчете ЗПС в нашей стране использовался метод сферической тригонометрии. В 30-е годы чл.-кор. АН СССР А. И. Тудоровский впервые применил к расчету ЗПС весьма мощный аппарат векторной алгебры и решил с его помощью ряд задач по анализу действия ЗПС [26, 27]. Им получено основное векторное уравнение действия одного и двух зеркал, выполнены расчеты по замене двух угловых зеркал одним и решены некоторые другие задачи. Однако чисто векторный метод расчета слишком громоздок и требует большого объема вычислений.

Много сделал по теоретическому исследованию ЗПС также И. В. Лебедев, который первый от векторного метода расчета ЗПС

перешел к векторно-матричному методу [13]. Он впервые дал классификацию ЗПС по основным их свойствам.

Дальнейшее развитие методов расчета ЗПС проведено в работах проф. Г. В. Погарева, который, используя труды Тудоровского и Лебедева, значительно продвинул вперед наши знания о ЗПС и, что особенно важно, решил много практических задач [16, 17]. Он показал возможности широкого конструктивного использования ЗПС и рассмотрел ряд задач юстирования приборов с их применением.

Следует отметить также работы канд. техн. наук Б. Л. Пошехонова, который графоаналитическим способом решил целый ряд задач из области ЗПС [20].

В последнее десятилетие в нашей стране метод конечного поворота твердого тела и кватернионов применительно к расчету систем ЗПС нашел рассмотрение в статьях канд. техн. наук Л. В. Потепуна [18, 19].

За рубежом кватернионы с указанной целью применялись раньше. Например, в 1951 г. Вагнер [37] исследовал системы плоских зеркал при помощи кватернионов.

Брауэр [33] пытался исследовать вопрос о системе плоских зеркал с помощью диадного исчисления, однако этот метод оказался недостаточно приспособленным для решения общих вопросов и, кроме нескольких частных приложений, существенных результатов не дал.

Следует отметить работы Ю. Г. Кожевникова по анализу и систематизации оптических призм, причем особое внимание в этих трудах уделено анализу и расчету сложных призм [12].

Некоторые вопросы систематизации ЗПС рассмотрены И. А. Греймом, П. В. Стендером, а также М. Б. Шефтелем [4—7], применивших к задачам расчета ЗПС метод бикватернионов.

При расчете ЗПС можно применять винтовое исчисление, разработанное рядом авторов [10]. Однако более целесообразно применять для расчетов ЗПС метод бикватернионов, а не винтовое исчисление.

При проектировании сложных призм приходится помимо расчетов, связанных с анализом их действия как зеркальных систем, выполнять расчеты по определению их габаритных размеров для сходящихся (расходящихся) пучков лучей, обеспечивающих максимальный угол поля зрения, относительное отверстие и минимальное виньетирование.

Каждая отражательная призма обычно разворачивается в плоскопараллельную пластинку, толщина которой соответствует длине хода луча в призме.

Гомоцентричный пучок лучей после прохождения призмы теряет свою гомоцентричность: появляется сферическая абберация, а при наклонном падении пучка астигматизм и кома. Кроме того, направление преломленного луча зависит от показателя преломления, который является функцией длины волны падающего света. Следовательно, имеют место и хроматические абберации.

В нашем случае вполне достаточно ограничиться парааксиальным приближением, т. е. рассматривать пучки лучей (с расходимостью до  $5-6^\circ$ ) при падении их на входную и выходную грани, близком к нормальному.

Продольное смещение луча в плоскопараллельной пластинке толщиной  $d$ , изготовленной из стекла с показателем преломления  $n$ , определяется формулой [28]

$$\Delta = d \left( 1 - \frac{\cos \varepsilon}{n \cos \varepsilon'} \right),$$

где  $\varepsilon$  — угол падения луча на входную поверхность;  $\varepsilon'$  — угол преломления, связанный с углом падения законом преломления

$$\sin \varepsilon' = \frac{1}{n} \sin \varepsilon.$$

Расчеты, связанные с определением aberrаций плоскопараллельных пластинок, а также габаритов призм, выполнены Г. В. Погаревым [16], М. М. Русиновым [22], В. Н. Чуриловским [28], Ю. Г. Кожевниковым [12] и др., поэтому здесь эти вопросы не рассматриваются.



## **ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПРИМЕНЯЕМЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДАХ РАСЧЕТА ЗЕРКАЛЬНО-ПРИЗМЕННЫХ СИСТЕМ**

Выделим требования, которые предъявляются к методам расчета ЗПС, и установим, какие из них можно считать перспективными и следует всячески развивать, а какие являются устаревшими и их необходимо использовать ограниченно или совсем не использовать. Критериями для оценки эффективности использования соответствующего математического метода будем считать в основном следующие:

- 1) возможность с помощью этого метода выполнять расчеты на ЭВМ;
- 2) малый объем вычислительных операций;
- 3) простоту и наглядность метода, в нем должна просматриваться решаемая задача с точки зрения геометрии ее построения;
- 4) использование метода не должно быть связано с наличием у оператора высокого пространственного воображения и глубоких математических знаний;
- 5) достаточная мера развитости и апробированности, чтобы можно было пользоваться готовым математическим аппаратом.

Несмотря на некоторые недостатки отдельных методов, их применение все-таки возможно, но в своей области расчетов, где их использование дает наиболее оптимальные результаты.

Кроме того, необходимо иметь в виду возможность и целесообразность использования одновременно нескольких методов, причем один из них может пояснять другой или являться базой для его развития.

### **1. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ЗАДАЧ ПРИ РАСЧЕТАХ ЗЕРКАЛЬНЫХ СИСТЕМ**

Все задачи в основном сводятся к созданию оптимальной с точки зрения точности, надежности и экономичности оптической системы, отвечающей техническим требованиям на ее проектирование. Правильная разработка технических требований сама по себе достаточно сложная техническая задача, требующая от конструктора значительного опыта в проектировании приборов аналогичного назначения.

Прежде всего все задачи расчета ЗПС следует разделить на задачи анализа и задачи синтеза. Первые задачи могут быть прямыми, когда требуется найти допуски на заданные внутренние или внешние параметры объекта, и обратными, когда по заданным отклонениям параметров ЗПС, внутренним или внешним, требуется найти отклонения в положении изображения объекта.

Таблица 1

Вид задачи	Состояние ЗС	Способ задания ЗС	Характеристика ЗС	Рекомендуемый метод решения
Задачи анализа	Неподвижна	ЗС задается любым способом	В основной СК Оператор действия ЗС в общем и каноническом виде Инвариантные направления и точки угловой или линейной базисы	Векторно-матричный метод, метод кватернионов или бикватернионов
		ЗС задается в операторном виде	В вспомогательной СК Оператор действия ЗС Положение отраженного луча, изображение точки Траектория изображения точки или поверхность, образуемая лучом при движении объекта-прообраза Параметры возможной перестановки элементарных ЗС, составляющих более сложную ЗС	Векторно-матричный метод, метод кватернионов или бикватернионов, в некоторых случаях метод сферической тригонометрии, когда требуется геометрическая наглядность
	Изменяет свое положение (сдвиг или поворот)	Задается ЗС в операторном виде и характер ее движения (сдвиги, повороты или траектория движения)	При перемещении ЗС Переменный оператор действия по сдвигу и повороту Траектория движения изображения точки или поверхность, образуемая лучом при неподвижном и подвижном объекте-прообразе	Метод бикватернионов, метод параметров Родрига-Гамильтона (при использовании ЭВМ), для геометрической наглядности метод сферической тригонометрии (при небольшом числе зеркал), метод стереографической проекции или параметров Кейли-Клейна [14]
Задачи синтеза	Неподвижна	Задается положение предмета и его изображение в ЗС	В статике Оператор действия и параметры ЗС	Метод бикватернионов или в редких случаях векторно-матричный метод
	Подвижна (дисcretные, сдвиг или поворот), движение по искривленной траектории	Задается траектория движения изображения предмета, положение или траектория движения его изображения после преобразования	В кинематике Оператор действия и параметры ЗС	Метод бикватернионов

Под внешними параметрами будем понимать параметры, связанные с расположением ЗПС в общей схеме всего прибора.

В задачи анализа входят также всевозможные упрощения схемы ЗПС: эквивалентная замена одних ЗПС другими, приведение матрицы действия ЗПС к каноническому виду, перестановка составляющих их зеркал (призм) без изменения общего хода лучей в системе, определение положений инвариантных осей, инвариантных и неизменных точек ЗПС, разложение действия сложной ЗПС на простейшие виды — сдвиг, поворот и инверсию.

При решении различных задач анализа (табл. 1) обычно приходится выполнять следующие операции.

1. Определять аналитический вид оператора действия ЗПС (в любой СК).

2. Определять аналитический вид операторов преобразования СК или операторов действия ЗС кватернионного или бикватернионного вида.

3. Находить общий аналитический вид уравнения, связывающего положение объекта до и после преобразования (образа и прообраза).

4. Приводить ЗПС к каноническому виду, т. е. находить положение инвариантной оси системы, ее внутренние эквивалентные параметры и положение неизменной точки системы.

5. Выполнять расчеты, связанные с нахождением параметров измененной ЗПС, но с тем же ходом лучей.

6. Производить перестановку последовательности расположения отдельных зеркал по ходу лучей без изменения общего хода лучей.

7. Определять коэффициенты, связывающие ошибки внутренних и внешних параметров с ошибками положения изображения предмета (луча).

8. Находить траектории движения изображения точки по заданным траекториям движения точки предмета или по заданным траекториям движения самой ЗПС.

Перейдем теперь к выяснению задач синтеза ЗПС. Остановимся на технических требованиях к синтезированию той или иной ЗПС. Прежде всего установим, что в результате синтеза должна быть создана ЗПС, представленная в инвариантном виде, т. е. из ЗПС простейших типов должен быть выбран один, отвечающий техническим требованиям на проектирование, и установлены его внутренние и внешние параметры.

В технических требованиях должны быть указаны следующие основные пункты.

1. Вид преобразования (конгруэнтное или неконгруэнтное).

2. Аналитический вид уравнения, связывающего положение объекта — образа и прообраза.

3. Требования к траектории изображения точки в подвижной ЗПС.

4. Максимально допустимые габаритные размеры.

5. Допустимые ошибки положения изображения предмета.

Широкое применение в расчетной технике современных вычислительных машин накладывает определенный отпечаток на применение тех или иных методов расчета, которых в настоящее время существует множество. Основных методов восемь: метод сферической тригонометрии, графоаналитический метод, векторный и векторно-матричный методы, метод конечных поворотов твердого тела, метод кватернионов (параметров Родриго—Гамильтона и Кейли-

Клейна), методы бикватернионов и винтов (винтовое исчисление).

Рассмотрим эти методы с учетом специфики решения задач, возникающих при расчете ЗПС.

## 2. ХАРАКТЕР ДЕЙСТВИЯ ЗЕРКАЛЬНО-ПРИЗМЕННЫХ СИСТЕМ

ЗПС дают конгруэнтные преобразования пространства с угловым увеличением, равным единице при четном их числе, и неконгруэнтные с увеличением, равным минус единице при нечетном числе, и характеризуются следующими видами преобразования пространства: инверсией, сдвигом и поворотом. Под инверсией понимают такое преобразование пространства, при котором радиус-вектор  $\vec{r}$  точки изменяет свое направление на обратное, преобразуется в радиус-вектор  $-\vec{r}$ . Это порождает неконгруэнтность преобразования пространства. Действительное изображение становится мнимым, а мнимое изображение — действительным. Такое преобразование дает одиночное зеркало (ОЗ), когда вектор коллинеарен орту его нормали. В общем случае одиночное зеркало дает все три вида преобразования: инверсию, сдвиг точки на двойное значение его расстояния от зеркала и поворот вокруг орта нормали на угол  $\pi$ . Два параллельных зеркала, называемых зеркальным ромбом (ЗР), дают сдвиг пространства на двойной линейный базис — двойное расстояние между его зеркалами по направлению орта нормали первого по ходу лучей зеркала. Два как угодно расположенных зеркала представляют собой так называемое угловое зеркало (УЗ), поворачивающее пространство вокруг его ребра на двойной угол между его зеркалами в сторону орта нормали первого зеркала по ходу лучей.

Т а б л и ц а 2 1

Вид ЗС	Число плоских зеркал в ЗС	Характеристика ЗС
ОЗ	Одно	Одна плоская отражающая поверхность
ЗР	Два	Зеркала параллельны, расстояние между ними представляет собой линейный базис $b$
УЗ		Зеркала непараллельны, угол между ними представляет собой угловой базис $\varphi$
ОЗ, ЗР	Три	Комбинация из ОЗ и ЗР, нормали зеркал компланарны
ОЗ, УЗ		Комбинация из ОЗ и УЗ, нормали зеркал некомпланарны
ЗР, УЗ	Четыре	Комбинация из ЗР и УЗ, нормали зеркал некомпланарны

Любая совокупность нечетного числа зеркал, приводимая к тройному зеркалу ОЗ, ЗР или ОЗ, УЗ, дает те же три вида преобразования пространства, что и ОЗ, не только с соответственно измененным сдвигом и поворотом (см. гл. 3).

Аналогично любые совокупности ЗС, состоящие из четного числа зеркал, представляют собой комбинации из ЗР или УЗ или тех и других совместно. ЗР и ОЗ дают сдвиг пространства, его поворот или сдвиг и поворот (табл. 2).

Указанные три вида преобразования пространства являются линейными (ортогональными и изометрическими — однородными и неоднородными). Линейное преобразование пространства в наиболее общем виде называется аффинным. При этом преобразовании три точки, лежащие на одной прямой, изображаются в три точки, также лежащие на одной прямой, но при этом пространство может претерпевать деформацию растяжения (сжатия) по одной или по всем трем осям декартовой прямоугольной СК. Например, линза дает аффинное преобразование пространства со сжатием или растяжением, определяемым продольным увеличением. Отрезок, произвольно ориентированный, изображается через линзу также в виде отрезка, но иначе повернутого и другой длины. Преломление лучей одной плоской поверхностью представляет собой частный случай сжатия пространства. Отражение лучей плоскими зеркалами является частным случаем аффинного преобразования, характеризующегося не только ортогональностью и линейностью, но и изометричностью: ни углы между прямыми, ни длины отрезков не изменяются — пространство не деформируется. Поэтому изучение ЗС должно вестись на основе разработанных в математике методов расчета линейных преобразований пространства — инверсии, поступательного смещения и поворота. Способ расчета действия ЗПС зависит от выбранного математического метода.

В соответствии с тремя видами преобразований пространства ЗС канонического вида матрица для сходящегося или расходящегося пункта лучей для случая, когда инвариантная ось системы коллинеарна оси ОЗ представляет собой матрицу четвертого порядка

$$\dot{T} = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \pm s_x & \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \pm s_y & \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \pm s_z & 0 & 0 & (-1)^m \end{array} \right),$$

где  $\psi$  — угол поворота пространства ЗПС;  $m$  — число зеркал в системе или число отражений лучей в них, если число отражений больше числа зеркал;  $s_x, s_y, s_z$  — абсолютные значения сдвигов пространства соответственно вдоль осей СК.

Эта матрица блочная, она разделена штриховыми линиями на четыре блока.

Нижний блок справа представляет собой матрицу поворота

$$T_{\text{пов}} = \left( \begin{array}{ccc} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^m \end{array} \right),$$

блок слева — матрицу сдвига

$$\hat{T}_{\text{сд}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \pm s_x & 1 & 0 & 0 \\ \pm s_y & 0 & 1 & 0 \\ \pm s_z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сдвиги пространства представляют собой неоднородные его преобразования, требующие для своего математического выражения матрицы четвертого порядка. И только повороты пространства являются однородными преобразованиями, которые могут быть представлены матрицами  $T$  третьего порядка. Стоящий внизу справа у матрицы член  $(-1)^m$  характеризует наличие или отсутствие в действии ЗПС инверсии. Если число зеркал  $m$  нечетно, ЗС будет давать в результате преобразования пространство, неконгруэнтное исходному; если  $m$  четное, то преобразуемое пространство будет конгруэнтно исходному.

Напишем на основе матрицы  $\hat{T}$  матрицы действия ОЗ, УЗ, ЗР для случая, когда инвариантные направления ЗПС (нормали ОЗ и ЗР и ребро УЗ) коллинеарны оси  $OZ$ .

Для ОЗ получим

$$\hat{T}_{\text{ОЗ}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \pm 2(r_z \pm p) & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где  $r_z$  — координата по оси  $O_z$  точки преобразаз.;  $p$  — расстояние от начала СК до ОЗ.

Преобразование пространства одиночным зеркалом является наиболее общим, оно содержит все три указанных вида преобразования: инверсию  $(-1)$ , поворот на угол  $\pi$  и сдвиг  $\pm 2(r_z + p)$ .

Для УЗ с углом  $\varphi$  между зеркалами и расстоянием  $r^0$  от начала системы координат до его ребра получим (ребро УЗ коллинеарно оси  $OZ$ )

$$\hat{T}_{\text{УЗ}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2r_x^0 \sin^2 \varphi - r_y^0 \sin 2\varphi & \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi & 0 \\ -2r_y^0 \sin^2 \varphi + r_x^0 \sin 2\varphi & \sin 2\varphi & \cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для ЗР матрица имеет вид

$$\hat{T}_{\text{ЗР}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2b & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Все сложные ЗПС являются комбинациями ОЗ, УЗ и ЗР. Например, основываясь на свойстве инвариантности ЗПС, можно написать матрицу действия для любого нечетного числа зеркал, содержащих ОЗ, УЗ и ЗР. Полагая, как и прежде, что ось  $OZ$  системы координат коллинеарна инвариантному направлению ЗПС, с учетом ранее полученного запишем

$$\hat{T}_{03, y3, 3p} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2r_x^0 \sin^2 \varphi_3 \pm r_y^0 \sin 2\varphi_3 & \cos(\pi \pm 2\varphi_3) & -\sin(\pi \pm 2\varphi_3) & 0 \\ -2r_y^0 \sin^2 \varphi_3 \pm r_x^0 \sin 2\varphi_3 & \sin(\pi \pm 2\varphi_3) & \cos(\pi \pm 2\varphi_3) & 0 \\ 2(r_z \pm p \pm b) & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2r_x^0 \sin \varphi_3 \pm r_y^0 \sin 2\varphi_3 & -\cos 2\varphi_3 \pm \sin 2\varphi_3 & 0 \\ -2r_y^0 \sin \varphi_3 \pm r_x^0 \sin 2\varphi_3 & \mp \sin 2\varphi_3 - \cos 2\varphi_3 & 0 \\ 2(r_z \pm p \pm b) & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где все параметры  $r_z$ ,  $r_x^0$ ,  $r_y^0$ ,  $p$ ,  $b$  и  $\varphi_3$  относятся к каноническому виду ЗП, знак у  $\sin 2\varphi$  определяется направлением поворота.

Как видим, во всех случаях преобразования пространства ЗПС имеются двойные углы поворота и двойные сдвиги. Это свойственно симметрическим преобразованиям пространства.

### 3. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

При расчете хода лучей через ЗПС приходится иметь дело с тремя видами векторов (рис. 1).

а) свободными векторами — ортами  $\vec{n}$  нормалей зеркальных поверхностей и  $\vec{u}$  направлениями световых пучков;

б) связанными—радиус-векторами  $\vec{r}$  точек  $M$  преобразов, преобразуемых в радиус-векторы  $\vec{r}'$  образов, и радиус-векторами  $r_0$ , которыми фиксируются положения ЗС или систем координат;

в) скользящими аксиальными векторами  $\vec{e}$  — ортами ребер УЗ. Необходимо четко различать понятия: компоненты вектора  $\vec{e}$  составляющие вектора по осям системы координат (например,  $r_x \vec{i}$ ,  $r_y \vec{j}$  и  $r_z \vec{k}$ ) и координаты вектора, являющиеся величинами проекции вектора на оси координат (для вектора  $\vec{r}$  это —  $r_x$ ,  $r_y$  и  $r_z$  (рис. 2)).

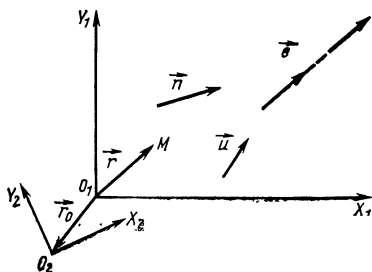


Рис. 1. Векторы свободные, скользящие и связанные

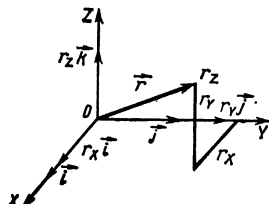


Рис. 2. Компоненты и координаты вектора

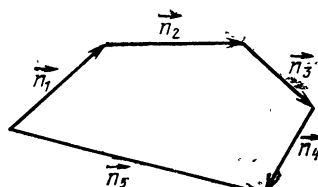


Рис. 3. Свободные векторы, представляющие собой замкнутый пятиугольник

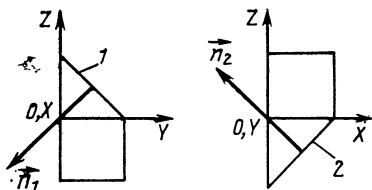
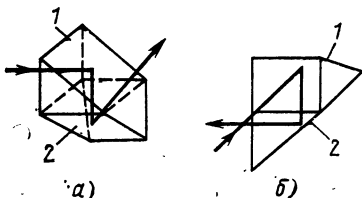


Рис. 4. Расположение системы координат относительно призмы:

*a* — первое положение; *б* — второе положение после поворота призмы вместе с системой координат на угол  $\pi/2$  вокруг оси *OZ* против часовой стрелки



Рассмотрим понятие о линейной зависимости векторов, важное для решения различных задач оптотехники.

Векторы  $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3, \dots, \vec{n}_k$  называются линейно зависимыми, если существуют такие числа  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , среди которых хотя одно отлично от нуля, что

$$a_1 \vec{n}_1 + a_2 \vec{n}_2 + \dots + a_k \vec{n}_k = 0.$$

Применительно к рис. 3 последняя формула дает

$$\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 + \vec{n}_4 + \vec{n}_5 = 0.$$

Напомним, что результатом суммирования свободных векторов является также свободный вектор; если же хотя бы один из векторов в сумме связанный, то в результате получается также связанный вектор.

**Скалярное произведение векторов.** Скалярным произведением двух векторов  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$  называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{n}_1 \vec{n}_2 = n_1 n_2 \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = n_{1x} n_{2x} + n_{1y} n_{2y} + n_{1z} n_{2z}.$$

Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю только тогда, когда эти векторы взаимно перпендикулярны.

В качестве примера использования понятия скалярного произведения векторов решим задачу нахождения угла  $\varphi_{1,2}$  между гранями 1 и 2 (рис. 4) одной из призм, применяемой в качестве оборачивающей призмы. Отражающая грань 1 призмы перпендикулярна плоскости чертежа на рис. 4,а, а грань 2 — плоскости чертежа на рис. 4,б, причем на рис. 4,б система координат вместе с призмой по-

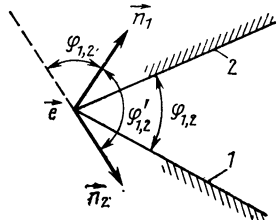


Рис. 5. Связь между углами:  $\varphi'_{12}$  — между нормальными и  $\varphi_{12}$  — между зеркалами



вернута на угол  $\pi/2$  вокруг оси  $OZ$  по сравнению с СК на рис. 4,а.

Компоненты  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$  ортов нормалей следующие:

$$\vec{n}_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}, \quad \vec{n}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}.$$

Воспользовавшись формулой для скалярного произведения ортов  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$ , получим

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 \vec{n}_2 &= \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = n_{1x}n_{2x} + n_{1y}n_{2y} + n_{1z}n_{2z} = \\ &= 0 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) 0 + \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

отсюда угол  $\vec{n}_1, \vec{n}_2 = 120^\circ$ .

Нас интересует не угол между нормальями  $\pi - \varphi_{1,2} = 120^\circ$ , а угол между зеркалами  $\varphi_{1,2}$  (рис. 5). Отсюда  $\varphi_{1,2} = 60^\circ$ .

**Векторное произведение векторов.** Векторным произведением двух векторов  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$  называется третий вектор, обозначаемый  $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ , удовлетворяющий следующим условиям; 1) модуль вектора равен произведению модулей векторов  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$  на синус угла между ними, т. е.  $|\vec{n}_1 \times \vec{n}_2| = |\vec{n}_1| |\vec{n}_2| \sin(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ ; 2) вектор  $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$  перпендикулярен к каждому из векторов  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$ ; 3) векторы  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{n}_2$  и  $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$  образуют правую тройку, т. е. вектор  $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$  направлен так, что кратчайший поворот от вектора  $\vec{n}_1$  к вектору  $\vec{n}_2$  вокруг него представляется происходящим против часовой стрелки. Векторное произведение векторов, заданных своими координатами, вычисляется по формуле

$$\vec{n}_2 \times \vec{n}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ n_{2x} & n_{2y} & n_{2z} \\ n_{1x} & n_{1y} & n_{1z} \end{vmatrix} =$$

$$= (n_{2y}n_{1z} - n_{1y}n_{2z})\vec{i} + (n_{2z}n_{1x} - n_{1z}n_{2x})\vec{j} + (n_{2x}n_{1y} - n_{2y}n_{1x})\vec{k}.$$

В качестве примера найдем положение ребра углового зеркала, образованного зеркалами 1 и 2. Орт ребра  $\vec{e}_{1,2}$  является аксиальным вектором, представляет собой единичный вектор ребра, и, следовательно,

$$e_{1,2} = \frac{\vec{n}_2 \times \vec{n}_1}{|\vec{n}_2 \times \vec{n}_1|} = \frac{\vec{n}_2 \times \vec{n}_1}{\sin(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}, \quad (1)$$

где  $\sin(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}$ ;  $e_x, e_y, e_z$  — координаты вектора  $\vec{e} \sin(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ .

Орт ребра  $\vec{e}$  считается положительным, если поворот пространства, смотря в противоположном ему направлении, осуществляется против часовой стрелки. В дальнейшем  $\vec{e}$  будем называть просто ортом, понимая под этим орт ребра УЗ. Координаты орта ребра  $\vec{e}_{1,2}$  могут быть найдены по формуле

$$\vec{e}_{12} = [(n_{2y}n_{1z} - n_{1y}n_{2z})\vec{i} + (n_{2z}n_{1x} - n_{1z}n_{2x})\vec{j} + (n_{2x}n_{1y} - n_{2y}n_{1x})\vec{k}] \frac{1}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}}. \quad (2)$$

Подставив сюда координаты ортов нормалей  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$ , получим

$$\begin{aligned} \vec{e}_{12} &= \left\{ \left[ 0 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \vec{i} + \right. \\ &\quad + \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 - \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] \vec{j} + \\ &\quad + \left. \left[ \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 0 \cdot 0 \right] \vec{k} \right\} \frac{2}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}} = \\ &= \left( \frac{1}{2} \vec{i} - \frac{1}{2} \vec{j} + \frac{1}{2} \vec{k} \right) \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{1}{2} \right)^2 + \left( -\frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \right)^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}). \end{aligned}$$

**Смешанное произведение трех векторов.** Смешанным, или векторно-скалярным, произведением трех векторов некомпланарных  $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$  называется скалярное произведение векторов  $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$  и  $\vec{n}_3$ , т. е.  $[\vec{n}_1 \times \vec{n}_2] \vec{n}_3$ . Смешанное произведение обладает сочетательным свойством ( $[\vec{n}_1 \times \vec{n}_2] \vec{n}_3 = \vec{n}_1 [\vec{n}_2 \times \vec{n}_3]$ ) и свойством круговой перестановки ( $\vec{n}_1 \vec{n}_2 \vec{n}_3 = \vec{n}_2 \vec{n}_3 \vec{n}_1 = \vec{n}_3 \vec{n}_1 \vec{n}_2$ ). В качестве примера рассмотрим определение угла между ортом нормали ОЗ и ребром УЗ.

Часто при расчете хода лучей через зеркально-призмные системы приходится находить углы между ортами ребер  $\vec{e}$  УЗ и ортами  $\vec{n}$  нормалей ОЗ. Например, если будем иметь призму с тремя отражающими поверхностями с ортами нормалей  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  и  $\vec{n}_3$ , то угол  $\gamma$  между ортом  $\vec{e}$  ребра УЗ, составленного из зеркал 1 и 2, и ортом  $\vec{n}_3$  нормали третьего зеркала может быть получен из смешанного произведения

$$\begin{aligned}\cos \gamma &= \cos (\vec{n}_3, \vec{n}_2 \times \vec{n}_1) = \frac{\vec{n}_3^T (\vec{n}_2 \times \vec{n}_1)}{\sin (\vec{n}_2, \vec{n}_1)} = \\ &= \frac{\vec{n}_1^T (\vec{n}_3 \times \vec{n}_2)}{\sin (\vec{n}_2, \vec{n}_1)} = \frac{\vec{n}_2^T (\vec{n}_1 \times \vec{n}_3)}{\sin (\vec{n}_2, \vec{n}_1)}.\end{aligned}\quad (3)$$

**Двойное векторное произведение.** Двойным векторным произведением трех векторов  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  и  $\vec{n}_3$  называется векторное произведение векторов  $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$  и  $\vec{n}_3$ :  $[\vec{n}_1 \times \vec{n}_2] \times \vec{n}_3$ . Двойное векторное произведение вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}[\vec{n}_1 \times \vec{n}_2] \times \vec{n}_3 &= \vec{n}_2 (\vec{n}_1 \vec{n}_3) - \vec{n}_1 (\vec{n}_2 \vec{n}_3), \quad \vec{n}_1 \times [\vec{n}_2 \times \vec{n}_3] = \\ &= \vec{n}_2 (\vec{n}_1 \vec{n}_3) - \vec{n}_3 (\vec{n}_1 \vec{n}_2).\end{aligned}$$

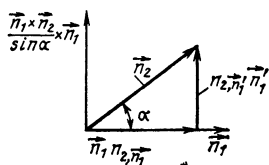


Рис. 6. Схема разложения орта  $\vec{n}_2$  по двум взаимно перпендикулярным направлениям

В качестве примера рассмотрим разложение орта нормали ОЗ (ребра УЗ) по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Для упрощения решения некоторых задач, например, при нахождении орта ребра УЗ, эквивалентного действию двух УЗ, приходится представлять один из ортов нормалей  $\vec{OZ}$   $\vec{n}_2$  в виде его разложения по направлению орта  $\vec{n}_1$  нормали первого ОЗ и направлению, ему перпендикулярному, находящемуся в плоскости этих ортов  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$  (рис. 6). С этой целью можно

воспользоваться формулой для двойного векторного произведения

$$\vec{n}_1 \times (\vec{n}_2 \times \vec{n}_1) = \vec{n}_2 (\vec{n}_1 \vec{n}_1) - \vec{n}_1 (\vec{n}_1 \vec{n}_2) = \vec{n}_2 - \vec{n}_1 (\vec{n}_1 \vec{n}_2). \quad (4)$$

Этот вектор компланарен ортам  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$ . Отсюда по формуле (4) определим

$$\begin{aligned}\vec{n}_2 &= \vec{n}_1 (\vec{n}_1 \vec{n}_2) + \vec{n}_1 \times (\vec{n}_2 \times \vec{n}_1) = \vec{n}_1 \cos (\vec{n}_1, \vec{n}_2) + \vec{n}_1 \times \vec{e} \sin \alpha = \\ &= n_{2,n_1} \vec{n}_1 + n_{2,n_1'} \vec{n}_1',\end{aligned}$$

где  $n_{2,n_1}$  — проекция орта  $\vec{n}_2$  на направление орта  $\vec{n}_1$ ;  $n_{2,n_1'}$  — проекция орта  $\vec{n}_2$  на направление, перпендикулярное орту  $\vec{n}_1$ ; орт  $\vec{n}_1' = \frac{\vec{n}_1 \times \vec{n}_2}{\sin \alpha} \times \vec{n}_1$  лежит в плоскости ортов  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$ .

Таким образом, орт  $\vec{n}_2$  разложен по направлению орта  $\vec{n}_1$  и направлению, ему перпендикулярному.

Также часто приходится пользоваться условиями компланарности, коллинеарности и перпендикулярности ортов нормалей зеркал  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{n}_2$  и  $\vec{n}_3$ :

условие компланарности трех ортов

$$\vec{n}_1 (\vec{n}_2 \times \vec{n}_3) = 0; \quad (5)$$

условие коллинеарности двух ортов

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 0 \\ \text{или} \\ \vec{n}_1 \vec{n}_2 = 1; \end{array} \right\} \quad (6)$$

условие перпендикулярности двух ортов

$$\left. \begin{array}{l} |\vec{n}_1 \times \vec{n}_2| = 1 \\ \text{или} \\ \vec{n}_1 \vec{n}_2 = 0. \end{array} \right\} \quad (7)$$

Напомним также важнейшие свойства векторных преобразований: сочетаемость по отношению к скалярному множителю

$$a (\vec{n}_1 \vec{n}_2) = (a \vec{n}_1) \vec{n}_2, \text{ но } \vec{n}_1 (\vec{n}_2 \vec{n}_3) \neq (\vec{n}_1 \vec{n}_2) \vec{n}_3;$$

$$a (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) = a \vec{n}_1 \times \vec{n}_2, \text{ но } \vec{n}_1 \times (\vec{n}_2 \times \vec{n}_3) \neq (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) \times \vec{n}_3;$$

распределительность по отношению к сложению

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 (\vec{n}_2 + \vec{n}_3) &= \vec{n}_1 \vec{n}_2 + \vec{n}_1 \vec{n}_3; \\ \vec{n}_1 \times (\vec{n}_2 + \vec{n}_3) &= \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 + \vec{n}_1 \times \vec{n}_3; \end{aligned}$$

коммутативность

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 \vec{n}_2 &= \vec{n}_2 \vec{n}_1; \\ \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 &= -\vec{n}_2 \times \vec{n}_1. \end{aligned} \quad (8)$$

#### 4. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД

При задании преобразования пространства формулами координаты образа выражаются через координаты прообраза. Напомним, что при преобразовании пространства каждой точке  $M$  пространства ставится в соответствие точка  $M'$  этого же пространства. При этом точка  $M'(x', y', z')$  называется образом точки  $M(x, y, z)$ , а последняя прообразом первой. Следовательно, координаты образа  $M'(x', y', z')$  являются некоторыми функциями координат прообраза  $M(x, y, z)$ . Заданием этих функций определяется то или иное преобразование пространства.

Во всем дальнейшем изложении будем применять правую прямоугольную декартову систему координат  $OXYZ$ .

Наиболее важен случай, когда функции, определяющие преобразования, линейны

$$\left. \begin{aligned} X' &= a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z + X_0; \\ Y' &= a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z + Y_0; \\ Z' &= a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z + Z_0; \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Здесь  $a_{gm}$  ( $g, m=1, 2, 3$ ) и  $X_0, Y_0, Z_0$  — заданные числа.

Если хотя бы одно из чисел  $X_0, Y_0, Z_0$  отлично от нуля, преобразование называется линейным неоднородным. Если  $X_0=Y_0=Z_0=0$ , преобразование называется однородным линейным или просто линейным преобразованием.

Формула (9) задает неоднородное или однородное линейное преобразование в координатной форме.

Неоднородное линейное преобразование можно разбить на два: преобразование

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x} &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ \tilde{y} &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z; \\ \tilde{z} &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

переводящее точку  $M(x, y, z)$  в некоторую точку  $\tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ , и преобразование

$$\left. \begin{aligned} x' &= \tilde{x} + x_0; \\ y' &= \tilde{y} + y_0; \\ z' &= \tilde{z} + z_0, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

переводящее точку  $\tilde{M}$  в точку  $M'(x', y', z')$ .

Первое из них представляет собой однородное линейное преобразование, второе — параллельный перенос всего пространства на вектор

$$\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}.$$

Таким образом, произвольное неоднородное линейное преобразование всегда можно представить как результат двух последовательно выполняемых линейных преобразований: однородного линейного и параллельного переноса. Матрица линейного преобразования пространства, являющаяся оператором этого преобразования, согласно выражениям (10) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

Итак, чтобы задать линейное преобразование, достаточно задать его матрицу  $A$ . В случае неоднородного линейного преобразования пространства матрица этого преобразования имеет четвертый порядок (в случае однородного — третий).

Напомним некоторые свойства матриц линейных преобразований. Если матрица  $A$  неособенная (ее определитель не равен нулю), то данное линейное преобразование называется невырожденным и имеет обратное линейное преобразование, при котором образы становятся прообразами, а прообразы — образами. Матрицей этого обратного преобразования является матрица  $A^{-1}$ , обратная по отношению к  $A$ . Напомним формулу обратной матрицы. Обозначим определитель матрицы  $A$  буквой  $\Delta$ , тогда

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}. \quad (12a)$$

Здесь  $A_{mg}$  означает алгебраическое дополнение элемента  $a_{mg}$  определителя  $\Delta$ , т. е. умноженный на  $(-1)^{m+g}$  определитель второго порядка, получающийся, если в определителе  $\Delta$  вычеркнуть  $m$ -ю строку и  $g$ -й столбец. Например,

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

## 5. СФЕРИЧЕСКАЯ И КОМПЛЕКСНАЯ СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

Сферическую тригонометрию можно применять как метод расчета в тех задачах, где существенна только ориентация различных элементов системы в пространстве и угловые перемещения, а расстояния между элементами и сдвиги в пространстве не имеют значения.

Сферическая тригонометрия устанавливает соотношения между длинами сторон и двугранными углами в сферических треугольниках, т. е. в прямоугольных и косоугольных треугольниках, расположенных на сфере и образованных тремя дугами больших окружностей, которые лежат в плоскостях, проходящих через центр сферы. При этом длина стороны треугольника равна сферическому расстоянию между соответствующими его вершинами, т. е. плоскому углу между радиусами сферы, направленными на вершины треугольника.

Для сферических треугольников справедливы теоремы, аналогичные тем, которые имеют место для плоских треугольников.

1. Сферическая теорема косинусов. В сферическом треугольнике  $ABC$  со сторонами  $a$ ,  $b$  и  $c$ , лежащими против углов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , имеет место соотношение

$$\cos \frac{a}{\rho} = \cos \frac{b}{\rho} \cos \frac{c}{\rho} + \sin \frac{b}{\rho} \sin \frac{c}{\rho} \cos A, \quad (13)$$

где  $\rho$  — радиус сферы.

В частности, когда угол  $A$  прямой, формула (13) дает сферическую теорему Пифагора:

$$\cos \frac{a}{\rho} = \cos \frac{b}{\rho} \cos \frac{c}{\rho}.$$

2. Сферическая теорема синусов. В сферическом треугольнике  $ABC$  имеет место соотношение

$$\frac{\sin A}{\sin \frac{a}{\rho}} = \frac{\sin B}{\sin \frac{b}{\rho}} = \frac{\sin C}{\sin \frac{c}{\rho}}.$$

3. Теорема косинусов. В сферическом треугольнике  $ABC$  имеет место соотношение

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos \frac{a}{\rho}.$$

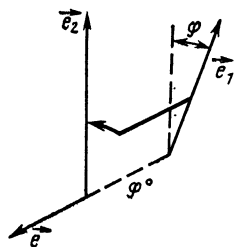


Рис. 7. Схема образования дуального угла  
 $\theta = \varphi + \omega\varphi^0$

На этих теоремах и основаны расчеты методом сферической тригонометрии.

Если в задаче требуется помимо определения направлений знать и сдвиги, то применяется комплексная сферическая тригонометрия, в которой вместо действительных углов используются комплексные углы, выражаемые дуальными числами Клиффорда:

$$\Phi = 2\varphi + 2\omega\varphi^0, \quad (14)$$

где  $\omega$  — символ Клиффорда, имеющий свойство  $\omega^2 = 0$  (хотя  $\omega \neq 0$ ) и выполняющий роль мнимой единицы;  $2\varphi$  — угол поворота пространства;  $2\varphi^0$  — сдвиг вдоль оси поворота (рис. 7).

В соответствии с принципом перенесения А. П. Котельникова основные теоремы сферической тригонометрии переносятся и в комплексную сферическую тригонометрию, если заменить действительные углы комплексными.

При числе зеркал, большем двух, этот метод практически неприменим ввиду сложности пространственного представления и громоздкости формул. В литературе встречаются лишь решения для параллельного хода лучей и рассматриваются только системы одного и двух зеркал [16].

## 6. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ПОВОРОТОВ ТВЕРДОГО ТЕЛА И КВАТЕРНИОНОВ

В последнее десятилетие метод конечных поворотов твердого тела начал применяться для расчета оптических систем и решения задач анализа [24].

При описании поворота твердого тела на угол  $2\varphi$  вокруг орта оси  $e$  вводится вектор конечного поворота

$$\vec{\theta} = 2\varphi \vec{e}. \quad (15)$$

Значение радиус-вектора  $\vec{r}'$  любой точки после его поворота вокруг орта оси  $e$  на угол  $2\varphi$  связано с его начальным значением  $\vec{r}$  до поворота формулой Родрига [14]

$$\vec{r}' = \vec{r} + \frac{2\vec{\theta}}{1 + \theta^2} \times (\vec{r} + \vec{\theta} \times \vec{r}). \quad (16)$$

Если имеется последовательность двух поворотов, заданных векторами конечного поворота  $\vec{\theta}_1$  и  $\vec{\theta}_2$ , то вектор результирующего конечного поворота  $\vec{\theta}_{1,2}$  определяется формулой Родрига—Гамильтона

$$\vec{\theta}_{1,2} = \frac{\vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_2 - \vec{\theta}_1 \times \vec{\theta}_2}{1 - \frac{1}{4} \vec{\theta}_1 \vec{\theta}_2}. \quad (17)$$

Метод кватернионов был разработан в прошлом веке выдающимся английским математиком Гамильтоном. Кватернион (КВ) представляет собой совокупность скалярной  $\lambda_0$  и векторной  $\vec{\lambda}e$  частей преобразования пространства вида

$$\Lambda = \lambda_0 + \vec{\lambda}e = \lambda_0 + \lambda_1 \vec{i}_1 + \lambda_2 \vec{i}_2 + \lambda_3 \vec{i}_3, \quad (18)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — координаты вектора  $\vec{\lambda}e$ ;  $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$  — орты осей координат.

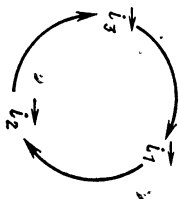


Рис. 8. Циклическая связь между мнимыми величинами  $i_1, i_2$  и  $i_3$

Кватернион простого геометрического объяснения не имеет, его можно представить как вращение в четырехмерном пространстве, причем следует иметь в виду, что одновременно  $\vec{i}_1, \vec{i}_2$  и  $\vec{i}_3$  представляют собой и гиперкомплексные числа. При умножении кватернионов нужно учитывать, что  $\vec{i}_1 \cdot \vec{i}_2 = \vec{i}_3$ ;  $\vec{i}_1 \cdot \vec{i}_1 = -1$ ;  $\vec{i}_2 \cdot \vec{i}_3 = \vec{i}_1$  (рис. 8), т. е. произведение гиперкомплексных единичных векторов дает не скаляр, как в векторной алгебре, а единичный вектор.

Произведение двух кватернионов вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} \Gamma = \Lambda \circ M = (\lambda_0 + \vec{\lambda}) \circ (\mu_0 + \vec{\mu}) &= \lambda_0 \mu_0 + \lambda_0 \vec{\mu} + \\ &+ \mu_0 \vec{\lambda} - \vec{\lambda} \vec{\mu} + \vec{\lambda} \times \vec{\mu} = \lambda_0 \mu_0 + \lambda_0 (\mu_1 \vec{i}_1 + \mu_2 \vec{i}_2 + \mu_3 \vec{i}_3) + \\ &+ \mu_0 (\lambda_1 \vec{i}_1 + \lambda_2 \vec{i}_2 + \lambda_3 \vec{i}_3) - \lambda_1 \mu_1 - \lambda_2 \mu_2 - \lambda_3 \mu_3 + \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (19)$$

где кружком обозначено кватернионное умножение.

Для нас важно, что при любом действии над КВ в результате получаем также КВ, в общем случае содержащий скалярную и векторную части.

Удобно представить кватернион в тригонометрическом виде (см. п. 31)



$$\Lambda = \cos \varphi + \vec{e} \sin \varphi, \quad (20)$$

где  $\varphi$  — половина угла действительного поворота пространства.

Произведение двух кватернионов  $\Lambda_1 = \cos \varphi_1 + \vec{e}_1 \sin \varphi_1$  и  $\Lambda_2 = \cos \varphi_2 + \vec{e}_2 \sin \varphi_2$  равноценно получению результирующего поворота пространства вначале вокруг орта  $\vec{e}_1$  на угол  $2\varphi_1$ , а затем вокруг орта  $\vec{e}_2$  на угол  $2\varphi_2$ . С учетом формулы (19) имеем

$$\begin{aligned} \Lambda_{12} &= \Lambda_2 \circ \Lambda_1 = (\cos \varphi_2 + \vec{e}_2 \sin \varphi_2) \circ (\cos \varphi_1 + \vec{e}_1 \sin \varphi_1) = \\ &= \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \vec{e}_1 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 \vec{e}_2 - \\ &\quad - \vec{e}_1 \vec{e}_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2. \end{aligned}$$

Сгруппировав скалярные и векторные части, получим

$$\begin{aligned} \Lambda_{12} &= \cos \varphi_{1,2} + \vec{e}_{1,2} \sin \varphi_{1,2} = (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \\ &\quad - \vec{e}_1 \vec{e}_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \vec{e}_1 + \\ &\quad + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\cos \varphi_{1,2} = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \vec{e}_1 \vec{e}_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2; \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_{1,2} &= \frac{1}{\sin \varphi_{1,2}} (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \vec{e}_1 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 \vec{e}_2 + \\ &\quad + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \vec{e}_2 \times \vec{e}_1). \end{aligned} \quad (23)$$

Формула (22) дает косинус результирующего угла  $2\varphi_{1,2}$  поворота пространства, а формула (23) — положение орта оси  $\vec{e}_{1,2}$  результирующего поворота в виде его разложения по осям  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  и направлению, перпендикулярному к ним,  $\vec{e}_2 \times \vec{e}_1$ .

Задача нахождения вектора  $\vec{r}'$  после поворота вектора  $\vec{r}$  вокруг орта оси  $\vec{e}$  на угол  $2\varphi$  равноценна воздействию на вектор  $\vec{r}$  кватерниона  $\Lambda$ . Общая формула имеет вид [1]

$$\vec{r}' = \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} = (\cos \varphi + \vec{e} \sin \varphi) \circ \vec{r} \circ (\cos \varphi - \vec{e} \sin \varphi), \quad (24)$$

где  $\tilde{\Lambda}$  — кватернион, сопряженный к кватерниону  $\Lambda$ .

Используя формулу (19), из (24) получим

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= (\cos \varphi \vec{r} - \vec{e} \vec{r} \sin \varphi + \vec{e} \times \vec{r} \sin \varphi) \circ \cos \varphi - \vec{e} \sin \varphi = \\ &= -\vec{e} \vec{r} \sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \varphi \vec{r} + \vec{e} \times \vec{r} \sin \varphi \cos \varphi + \\ &\quad + \vec{e} (\vec{e} \vec{r}) \sin^2 \varphi + \vec{e} \vec{r} \sin \varphi \cos \varphi + \vec{e} \vec{e} \times \vec{r} \sin^2 \varphi + \\ &\quad + \vec{e} \times \vec{r} \sin \varphi \cos \varphi + \vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{r}) \sin^2 \varphi. \end{aligned} \quad (25)$$

Произведя упрощения и замены, раскрыв двойное векторное произведение, получим формулу [4]

$$\vec{r}' = \vec{r} \cos 2\varphi + \vec{e}(\vec{e}\vec{r})(1 - \cos 2\varphi) + \vec{e} \times \vec{r} \sin 2\varphi. \quad (26)$$

Более подробно метод кватернионов рассмотрен в гл. 5.

## 7. МЕТОДЫ ВИНТОВ И БИКВАТЕРНИОНОВ

Методы винтов и бикватернионов рассмотрим совместно, так как они имеют много общего (см. гл. 5).

Метод винтов представляет собой обобщение метода конечных поворотов твердого тела, позволяющее описывать не только повороты, но и сдвиги в пространстве. Винт представляет собой «комплексный» вектор, координатами которого являются так называемые дуальные числа Клиффорда [10]. Он зависит от шести действительных параметров. Наиболее удобны следующие шесть параметров: два угла, определяющие направление оси винта  $\vec{e}$  в пространстве; две координаты точки пересечения этой оси с некоторой плоскостью, фиксирующие положение оси в пространстве, и два параметра — угол поворота вокруг оси  $\vec{e}$  и сдвиг вдоль винта.

Все формулы винтового исчисления получаются из формул векторного исчисления и теории конечных поворотов, если заменить в них векторы винтами, т. е. считать векторы комплексными числами [10].

При этом вводится комплексный вектор винтового перемещения

$$\vec{\theta} = \vec{\Lambda} \operatorname{tg} \Phi/2, \quad (27)$$

где  $\vec{\Lambda}$  — единичный винт, задающий ориентацию оси и фиксирующий ее положение в пространстве:  $\Phi = 2\varphi + 2\omega\varphi^\circ$  — комплексный угол (см. рис. 7);  $\omega$  — символ Клиффорда.

Преобразование радиус-вектора точки  $\vec{r}$  при винтовом перемещении и сложении двух последовательных винтовых перемещений определяются формулами, которые получаются по принципу перенесения из формул (16) и (17) Родрига и Родрига—Гамильтона соответственно.

Метод бикватернионов является наиболее удобным для описания преобразований пространства и решения пространственных задач. Бикватернион (БК), обозначаемый, как и кватернион  $\bar{\Lambda}$ , но с чертой наверху, отличается от винта наличием наряду с векторной частью еще одного слагаемого — скалярной части и имеет вид

$$\bar{\Lambda} = \cos \Phi/2 + \vec{\lambda} \sin \Phi/2. \quad (28)$$

Таким образом, бикватернион зависит от тех же шести действительных параметров, что и винт. Комплексный угол  $\Phi$  определяется формулой (14), а комплексный вектор, или бивектор  $\vec{\lambda}$ , формулой [10]

$$\vec{\lambda} = \vec{\lambda} + \omega \vec{r} \times \vec{\lambda}, \quad (29)$$

где  $\vec{\lambda}$  — единичный вектор, задающий ориентацию оси винта (рис. 9);  $\vec{r}^0$  — вектор сдвига оси винта из начала координат, перпендикулярный к этой оси и фиксирующий положение винта в пространстве.

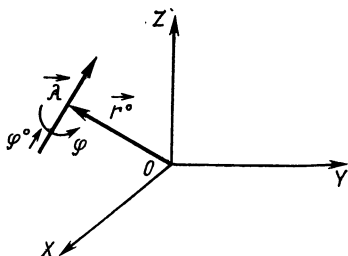


Рис. 9. Геометрическое представление бикватерниона  $\bar{A}$  с бивектором  $\vec{\lambda}$  и моментной частью (сдвигом) — вектором  $\vec{r}^0$

Каждое преобразование пространства описывается некоторым бикватернионом, а последовательность преобразований соответствующим произведением бикватернионов.

При этом точки пространства с радиус-векторами  $\vec{r}$  также описываются бикватернионами вида

$$\bar{R} = 1 + \omega \vec{r}, \quad (30)$$

а радиус-вектор  $\vec{r}$  точки после преобразования находится по формулам:

при конгруэнтном преобразовании

$$\bar{R}' = 1 + \omega \vec{r}' = \bar{A} \circ \bar{R} \circ \bar{A};$$

при неконгруэнтном преобразовании

$$\bar{R}' = 1 + \omega \vec{r}' = \bar{A} \circ \bar{R} \circ \bar{\bar{A}}, \quad (31)$$

где волна сверху означает кватернионное сопряжение, двойная волна внизу — дуальное сопряжение.

Эти компактные формулы заменяют громоздкую формулу (16).

Умножение бикватернионов выполняется по тем же правилам, что и умножение кватернионов [см. выражение (19)]:

$$\begin{aligned} \bar{A}_2 \circ \bar{A}_1 &= (\cos \Phi_2 + \vec{\lambda}_2 \sin \Phi_2) \circ (\cos \Phi_1 + \vec{\lambda}_1 \sin \Phi_1) = \\ &= \cos \Phi_1 \cos \Phi_2 + \cos \Phi_1 \sin \Phi_2 \vec{\lambda}_2 + \cos \Phi_2 \sin \Phi_1 \vec{\lambda}_1 - \\ &\quad - \sin \Phi_1 \sin \Phi_2 \vec{\lambda}_1 \vec{\lambda}_2 + \sin \Phi_1 \sin \Phi_2 \lambda_2 \times \lambda_1. \end{aligned} \quad (32)$$

Преимущество бикватернионов по сравнению с винтами более очевидно, когда выполняется последовательность не двух, а трех или более преобразований пространства. В винтовом исчислении аналог формулы Родрига—Гамильтона (17) приводит к многоэтажным формулам. Например, при сложении винтов  $\vec{\theta}_1$ ,  $\vec{\theta}_2$  и  $\vec{\theta}_3$  получаем

$$\vec{\theta}_{1,2,3} = \frac{\frac{\vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_2 - \vec{\theta}_1 \times \vec{\theta}_2}{1 - \vec{\theta}_1 \vec{\theta}_2} + \vec{\theta}_3 - \frac{\vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_2 - \vec{\theta}_1 \times \vec{\theta}_2}{1 - \vec{\theta}_1 \vec{\theta}_2} \times \vec{\theta}_3}{1 - \frac{\vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_2 - \vec{\theta}_1 \times \vec{\theta}_2}{1 - \vec{\theta}_1 \vec{\theta}_2} - \vec{\theta}_3} \quad (33)$$

В методе бикватернионов результат действия трех винтовых перемещений описывается просто произведением соответствующих бикватернионов

$$\bar{\Lambda}_{1,2,3} = \bar{\Lambda}_3 \circ \bar{\Lambda}_2 \circ \bar{\Lambda}_1. \quad (34)$$

Формула (34) имеет более компактный и обозримый вид, чем (33), что упрощает все промежуточные выкладки. Конечный результат получится такой же, как и в методе винтов, но объем вычислений сокращается. Кроме того, алгебра бикватернионов более удобна для составления программ при расчетах на ЭВМ, так как достаточно составить стандартную программу для умножения бикватернионов. Запрограммировать винтовое исчисление более сложно.

Метод бикватернионов позволяет эффективно решать и задачи синтеза зеркальных систем как статических, так и движущихся по определенным законам.

## ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА

При расчете хода лучей в оптических системах приходится рассматривать векторы, отличающиеся один от другого модулем и направлением. Замену одного вектора другим часто целесообразно представлять как результат линейного преобразования пространства (или плоскости) в целом. Под словом «пространство» здесь понимаем трехмерное пространство.

Говоря о линейных преобразованиях пространства, будем рассматривать линейное преобразование плоскости как частный его случай. Все относящееся к линейным преобразованиям пространства с соответствующими изменениями будет справедливо и для линейных преобразований на плоскости. Преобразование пространства можно задать словесной формулировкой или формулами. При задании линейного преобразования формулами можно осуществить его в следующих формах: координатной, векторной, матричной, кватернионной и бикватернионной, с помощью параметров Родрига—Гамильтона, Кейли—Клейна, винтового исчисления и др. [14].

Приведем несколько примеров задания преобразования пространства словесной формулировкой:

1. Поворот пространства: преобразование пространства будет определено, если указать, что осуществлен поворот пространства как твердого тела на заданный угол вокруг заданной оси.

2. Параллельное смещение пространства: все точки пространства смещаются на одно и то же расстояние в одном и том же направлении.

3. Инверсия: преобразование, когда вектор претерпевает инверсию; применительно к СК это означает переход от правой СК к левой и наоборот.

4. Сжатие или растяжение пространства (оно имеет место, например, когда свет переходит в среду с иной оптической плотностью).

### 1. ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ

Плоскость полностью определяется заданием двух пересекающихся прямых, лежащих в ней; их образами при линейном преобразовании будут тоже две пересекающиеся прямые, которые определяют собой некоторую вторую плоскость. Легко видеть, что она и будет образом первой плоскости. Действительно, через любую точку<sup>1</sup> пер-

<sup>1</sup> Кроме точки пересечения этих прямых, но ее образ, очевидно, лежит также и во второй плоскости.

вой плоскости можно провести прямую, пересекающую две упомянутые прямые; ее образом будет прямая, имеющая две общие точки со второй плоскостью и, следовательно, целиком в ней лежащая.

Для линейного преобразования на плоскости имеем формулы

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y; \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

а матрица этого преобразования

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Если определитель этой матрицы

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0,$$

имеем невырожденное преобразование, при котором плоскость преобразуется во всю эту плоскость, т. е. каждая точка плоскости  $XOY$  является образом некоторой (и притом единственной) точки этой плоскости. В этом случае существует обратное преобразование плоскости, матрица которого согласно (12а)

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Если  $\Delta = 0$ , то линейное преобразование вырожденное, обратного преобразования нет, и не существует обратной матрицы. Матрица  $A$  в этом случае называется особенной. При этом, если матрица  $A$  не нулевая (т. е. не все ее элементы нули), то плоскость при линейном преобразовании с этой матрицей преобразуется в лежащую на ней прямую, проходящую через начало координат, которое всегда преобразуется в себя.

Действительно, в этом случае между правыми частями (35) имеет место линейная зависимость

$$\eta (a_{11}x + a_{12}y) + \vartheta (a_{21}x + a_{22}y) = 0,$$

причем хотя бы одно из чисел  $\eta$  или  $\vartheta$  не равно нулю. Для образа любой точки имеем

$$\eta x' + \vartheta y' = 0,$$

т. е. все образы точек плоскости лежат на этой прямой.

Числа  $\eta$  и  $\vartheta$  находим с точностью до произвольного множителя, приравняв нулю  $\eta a_{11} + \vartheta a_{21}$  или  $\eta a_{12} + \vartheta a_{22}$ . Например, при преобразовании

$$\left. \begin{aligned} x' &= 2x - 4y; \\ y' &= -3x + 6y \end{aligned} \right\}$$

с особенной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

любая точка плоскости переходит в точку, лежащую на прямой

$$3x + 2y = 0.$$

Коэффициенты этого уравнения найдем из уравнения  $2\eta - 3v = 0$ , откуда можно выбрать, например,  $\eta = 3$ ,  $v = 2$ .

Линейное преобразование плоскости с нулевой матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

переводит любую точку этой плоскости в начало координат  $O(0, 0)$ .

Линейное преобразование с единичной матрицей  $E$

$$A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

представляет собой тождественное преобразование, при котором каждая точка переходит сама в себя, т. е. остается на месте.

Напомним, что произведение прямой и обратной матриц (в любом порядке) равно единичной матрице

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \quad (36)$$

Эта формула имеет очень простое истолкование с точки зрения умножения преобразований. Как известно, произведением двух линейных преобразований называется такое линейное преобразование, которое получается при последовательном выполнении этих двух преобразований. При этом, если сначала выполнить линейное преобразование с матрицей  $A$ , а затем линейное преобразование с матрицей  $B$ , то получим произведение этих преобразований, которое представляет собой линейное преобразование с матрицей  $BA$ . Но если сначала выполнить некоторое невырожденное линейное преобразование, а затем выполнить обратное ему, то все точки вернуться на старые места, т. е. получится тождественное преобразование. Это и выражает равенство (36).

## 2. ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА В ВЕКТОРНОЙ ФОРМЕ

Линейное преобразование пространства, как было отмечено, может быть однородным и неоднородным. Неоднородное линейное преобразование пространства, задаваемое в координатной форме уравнением (11), характеризуется сдвигом — параллельным переносом пространства.

Параллельный перенос пространства (без изменения направления лучей) осуществляют следующие оптические системы: зеркальный ромб (ромб-призма), плоскопараллельная пластинка и афокальная система с угловым увеличением, равным единице. В векторной форме общий случай линейного неоднородного преобразования записывается так:

$$\vec{r}' = A\vec{r} + \vec{r}_0. \quad (37)$$

При нелинейном преобразовании прямолинейный отрезок может перейти в отрезок некоторой кривой линии, так что при нелинейном преобразовании точек нельзя говорить о преобразовании векторов.

Общее неоднородное линейное преобразование (37) распадается, как видно из уравнения (9), записанного в координатном виде, на два линейных преобразования: однородное и неоднородное. В век-

торно-матричным виде они записываются формулами:  
для однородного преобразования (только повороты)

$$\vec{r}' = A\vec{r}; \quad (38)$$

для неоднородного (с параллельным переносом  $\vec{r}_0$ )

$$\vec{r}'_0 = \vec{r}' + \vec{r}_0, \quad (39)$$

где  $A$  — оператор преобразования в виде матрицы.

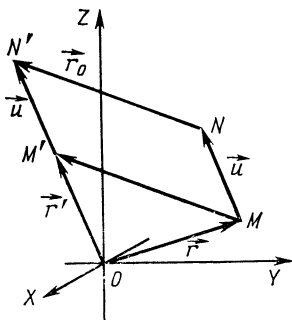


Рис. 10. Сдвиг пространства на вектор  $\vec{u}$

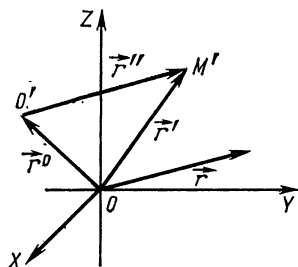


Рис. 11. Связь между радиус-векторами  $\vec{r}^0$  при сдвиге пространства на  $\vec{r}''$

Заметим, что параллельный перенос является таким частным случаем общего неоднородного линейного преобразования, при котором оператор  $A$  является оператором тождественного преобразования с единичной матрицей  $E$ , не изменяющего радиус-вектор  $\vec{r}$ .

Ранее рассматривались радиус-векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{r}'$  точек прообраза и образа, но в случае свободных векторов имеет место только однородное линейное преобразование.

При параллельном переносе пространства свободный вектор по самому своему определению не изменяется (см. вектор  $\vec{u}$  на рис. 10), поэтому неоднородное линейное преобразование, как преобразование свободных векторов, однозначно задать нельзя.

В оптике свободными векторами задаются направления параллельных пучков лучей, которые соответствуют удаленному в бесконечность наблюдаемому объекту. Для этого случая все неоднородные линейные преобразования  $\vec{r}'_0 = A\vec{r} + \vec{r}_0$  с одним и тем же  $A$ , но различными  $\vec{r}_0$  равносильны однородному линейному преобразованию (38).

Что касается преобразования радиус-векторов, то надо иметь в виду следующее: при однородном линейном преобразовании начало координат имеет своим образом самого себя. Поэтому образом радиус-вектора точки  $M$  является также радиус-вектор точки  $M'$



(рис. 10). В этом случае формулу (37) можно применять как для нахождения образов свободных векторов, так и для нахождения образов радиус-векторов и соответствующих им точек.

В случае неоднородного преобразования образом любого (ненулевого) радиус-вектора является вектор, но не радиус-вектор, так как при неоднородном линейном преобразовании начало координат переходит в другую точку.

В данном случае неоднородность преобразования пространства понимается как сдвиг начала СК, но если сдвиг относится к точке, то радиус-вектор остается также радиус-вектором.

Например (рис. 11), если  $M'$  — образ точки  $M$  и  $O'$  — образ начала координат  $O$ , то образом радиус-вектора  $OM$  точки  $M$  в прежней СК является вектор  $O'M'$ , а не радиус-вектор  $\vec{r}' = \vec{O'M'}$  точки  $M'$ . Для новой СК с началом в точке  $O'$  положение точки  $M'$  выражается радиус-вектором  $\vec{O'M'}$ .

Кроме того, необходимо иметь в виду, что сдвиг начала координат на вектор  $\vec{r}_0$  равносителен смещению всего пространства на этот вектор  $\vec{r}_0$ .

### 3. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА И МАТРИЦЫ

Введем в рассмотрение одностолбцовые матрицы, соответствующие свободным векторам. Для вектора

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$$

соответствующей считаем одностолбцовую матрицу

$$U = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}.$$

Обозначим  $R_k$  и  $R'_k$  одностолбцовые матрицы, соответствующие радиус-векторам  $\vec{r}_k$  и  $\vec{r}'_k$ , представленным в  $k$ -й СК.

Например, для

$$\vec{r}_k = x_k \vec{i} + y_k \vec{j} + z_k \vec{k}$$

имеем

$$R_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}. \quad (40)$$

При этом линейному преобразованию вида (38) соответствует умножение одностолбцовой матрицы  $R_k$  слева на матрицу этого преобразования:

$$R'_k = A_k R_k. \quad (41)$$

Матрице  $A$  приписывался индекс  $k$ , так как эта матрица в дан-

ном уравнении должна быть выражена в той же СК, что и исходный вектор или радиус-вектор.

Если в формулу (41) вместо  $A_k$  и  $R_k$  подставить выражения (12) и (40), заменив (12)  $A$  на  $A_k$ , то, используя известное правило перемножения матриц, получим

$$\begin{aligned} R'_k &= \begin{pmatrix} x'_k \\ y'_k \\ z'_k \end{pmatrix} = A_k R_k = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_k + a_{12}y_k + a_{13}z_k \\ a_{21}x_k + a_{22}y_k + a_{23}z_k \\ a_{31}x_k + a_{32}y_k + a_{33}z_k \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (42)$$

Если под  $A_k$  понимать матрицу  $L_{kt}$ , то формула будет иметь вид

$$R'_t = L_{kt} R_k. \quad (43)$$

Индексы у матрицы  $L_{kt}$  обозначают, что пересчет координат производится из СК<sub>k</sub> в СК<sub>t</sub>.

Таким образом, линейные преобразования векторов описываются умножением соответствующих им одностолбцовых матриц слева на квадратные матрицы этих преобразований.

Очевидно и обратное: если линейное преобразование пространства или плоскости задано в виде произведения матриц (41), то его можно представить в виде преобразования векторов  $\vec{r}_k$  и  $\vec{r}'_k$ , где эти векторы соответствуют (в вышеуказанном смысле) одностолбцовым матрицам  $R_k$  и  $R'_k$ , а линейное преобразование  $A_k \vec{r}_k$  имеет своей матрицей  $A_k R_k$ .

Формулы (41) и (43) имеют тождественный вид, однако смысл их функционального действия различен. Формула (41) характеризует преобразование вектора, радиус-вектора в той же самой СК, в которой он задан, а формула (43) характеризует преобразование вектора, радиус-вектора в другую по сравнению с той, в которой он задан, СК.

Тождественность задания векторов, радиус-векторов в различных СК в виде соответствующих одностолбцовых матриц говорит о том, что и между матрицами  $A_k$  и  $L_{kt}$  имеется тождественность. Действительно (см. п. 16), обе эти матрицы могут иметь действия, характеризующие поворот, сдвиг и инверсию пространства.

#### 4. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА

Рассмотрим свойства ортогональных преобразований пространства. Любую матрицу  $L$  при ортогональном преобразовании пространства можно представить в виде

$$L_{12} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_3 & \cos \beta_3 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1 i_2} & \overrightarrow{i_1 j_2} & \overrightarrow{i_1 k_2} \\ \overrightarrow{j_1 i_2} & \overrightarrow{j_1 j_2} & \overrightarrow{j_1 k_2} \\ \overrightarrow{k_1 i_2} & \overrightarrow{k_1 j_2} & \overrightarrow{k_1 k_2} \end{pmatrix}, \quad (44)$$

где элементы матриц являются направляющими косинусами — проекциями ортов одной СК на орты осей другой. Причем по строкам раскладывается базис одной СК, а по столбцам — другой, отсюда транспонирование матриц служит для получения обратного преобразования.

Матрица ортогонального преобразования пространства обладает двумя свойствами. Первое свойство заключается в том, что сумма квадратов элементов по каждой строке или каждому столбцу равна единице, так как преобразование производится с единичным вектором-ортом. Вторым свойством ортогонального преобразования является равенство нулю суммы произведений соответствующих элементов любых двух строк или любых двух столбцов.

Объяснение этому заключается в том, что ортогональное преобразование пространства осуществляется всегда путем поворота вокруг одной из осей СК, поэтому для такого преобразования задача становится плоской. При этом проекции ортов поворачиваемых осей на ось вращения равны нулю, а четыре другие проекции, накрест расположенные, равны, и одна из них имеет знак минус. Поясним сказанное на примере матрицы поворота пространства на угол  $\varphi$  вокруг оси  $OX_1$ . Из выражения (44) матрица этого преобразования

$$L_{12OX} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (45)$$

В общем виде свойство ортогональности преобразования записывается так:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^3 a_{ig} a_{it} &= \begin{cases} 0 & g \neq t (1, 2, 3), \\ 1 & g = t = 1, 2, 3; \end{cases} \\ \sum_{j=1}^3 a_{gj} a_{tj} &= \begin{cases} 0 & g \neq t (1, 2, 3), \\ 1 & g = t = 1, 2, 3, \end{cases} \end{aligned} \right\}$$

где  $i$  — число строк;  $j$  — число столбцов.

Этими двумя свойствами ортогональности широко пользуются при проверке правильности получаемых матриц.

## 5. ВЫРОЖДЕННОЕ И НЕВЫРОЖДЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА

Пространство при невырожденном линейном преобразовании преобразуется во все пространство, т. е. любая точка пространства является образом некоторой (и притом единственной) точки.

Если матрица  $A$  особенная, т. е.  $\det A=0$ , то она не имеет обратной матрицы, а соответствующее этой матрице линейное преобразование называется вырожденным и не имеет обратного преобразования. В этом случае пространство преобразуется не во все пространство, а в плоскость, прямую или точку (начало координат) в зависимости от того, будет ли ранг матрицы равен двум, единице или нулю.

Например, линейное преобразование

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x} &= x - 2y + z, \\ \tilde{y} &= 3x + y - 2z, \\ \tilde{z} &= x + 5y - 4z \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

имеет матрицу  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$  с определителем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Ранг этой матрицы равен двум, так как имеется минор второго порядка, не равный нулю; например

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

В этом случае правая часть одного из трех соотношений (46) является линейной комбинацией правых частей других двух равенств.

В рассматриваемом примере, например,

$$x + 5y - 4z = -2(x - 2y + z) + (3x + y - 2z).$$

Для нахождения этого тождества запишем соотношение

$$x + 5y - 4z = \alpha(x - 2y + z) + \beta(3x + y - 2z)$$

и найдем числа  $\alpha$  и  $\beta$  из сравнения коэффициентов при  $x$  и  $y$ :

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 1, \\ -2\alpha + \beta = 5. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений числа  $\alpha = -2$ ,  $\beta = 1$  определяются однозначно, так как определитель системы не равен нулю.

При этих значениях  $\alpha$  и  $\beta$  коэффициенты при  $z$  получаются одинаковыми. Следовательно,  $z = -2x - y$ , т. е. для любой точки-преобраза  $M(x, y, z)$  ее образ лежит на плоскости

$$2x - y + z = 0.$$

Итак, в этом примере все пространство отображается в плоскость

$$2x - y + z = 0.$$

В качестве примера линейного преобразования с матрицей, ранг которой равен 1, возьмем

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - 2y + z; \\ y' &= 2x - 4y + 2z; \\ z' &= 5x - 10y + 5z. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Очевидно, что определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 5 & -10 & 5 \end{pmatrix} = 0.$$

Ранг этой матрицы равен единице, так как все миноры второго порядка равны нулю. Любую точку пространства  $M(x, y, z)$  это преобразование переводит в точку, лежащую на прямой

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{5},$$

так как очевидно, что

$$(x - 2y + z) : (2x - 4y + 2z) : (5x - 10y + 5z) = 1:2:5,$$

поэтому

$$x' : y' : z' = 1:2:5.$$

Ранг, равный нулю, имеет только нулевая матрица  $A=0$ .

В связи с этим при вырожденном линейном преобразовании пространство преобразуется в плоскость или прямую, проходящие через начало координат.

Докажем иным, чем в п. 1 гл. 2, способом, что при невырожденном однородном или неоднородном линейном преобразовании пространства прямая переходит в прямую. Для параллельного переноса пространства это очевидно, поэтому доказательство нужно только для однородного линейного преобразования пространства.

Как известно из аналитической геометрии [20], векторно-параметрическое уравнение прямой имеет вид

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t,$$

где  $\vec{r}_0$  — радиус-вектор фиксированной точки прямой;  $\vec{s}$  — направляющий вектор этой прямой;  $t$  — параметр.

Соответствующее матрично-параметрическое уравнение записывается так:

$$R = R_0 + St.$$

При однородном линейном преобразовании с матрицей  $A$  эти одно-столбцовые матрицы переходят в одно-столбцовые матрицы образов соответствующих векторов, а именно

$$R' = AR, \quad R'_0 = AR_0, \quad S' = AS,$$

и, очевидно, по-прежнему будет

$$R' = R'_0 + S't,$$

т. е. образом прямой опять является прямая.

## 6. РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ) ПРОСТРАНСТВА В НАПРАВЛЕНИИ КООРДИНАТНОЙ ОСИ

Из квадратных матриц третьего порядка прежде всего выделяются как наиболее простые диагональные матрицы, у которых элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю.

Рассмотрим теперь более общие случаи преобразований с диагональными матрицами.

Рассмотрим преобразование пространства, заключающееся в том, что все точки плоскости  $XOY$  остаются неподвижными, а остальные точки пространства удаляются от этой плоскости или приближаются к ней (рис. 12).

Общий для всех точек коэффициент пропорциональности обозначим  $K$  и назовем коэффициентом растяжения, а само преобразование пространства — растяжением его, например вдоль оси  $OZ$ . При этом преобразовании абсцисса и ордината любой точки не изменяются, а аппликата умножается на положительное число  $K$ . Причем, если  $K > 1$ , то

при преобразовании пространства точки удаляются от плоскости  $XOY$ , т. е. имеет место растяжение пространства в собственном смысле; если  $K = 1$ , то все точки остаются на месте, т. е. имеет место тождественное преобразование, которое, следовательно, можно считать частным случаем растяжения пространства; наконец, при  $K < 1$  точки приближаются к плоскости  $XOY$  — имеет место сжатие пространства к плоскости  $XOY$ , которое будем рассматривать как частный случай растяжения.

Отсюда всякая плоская фигура, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси  $OZ$ , будет переходить в равную ей (т. е. совпадающую при наложении) фигуру, только расположенную в общем случае в другой плоскости, перпендикулярной оси  $OZ$ . Фигуры, не лежащие в плоскости, перпендикулярной оси  $OZ$ , в общем случае деформируются, т. е. преобразуются в фигуры, не подобные исходным. Однако, как было доказано выше, плоские фигуры остаются плоскими. Для прообраза точки  $M(x, y, z)$  при растяжении пространства вдоль оси  $OZ$  с коэффициентом растяжения  $K$  образом будет точка  $M'(x', y', z')$  с координатами

$$\left. \begin{aligned} x' &= x; \\ y' &= y; \\ z' &= Kz. \end{aligned} \right\}$$

Матрица этого линейного преобразования имеет вид

$$C_K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}.$$

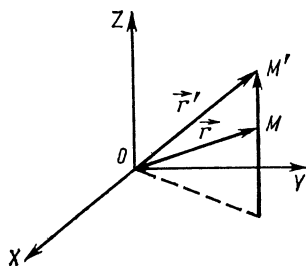


Рис. 12. Растяжение пространства вдоль оси  $OZ$

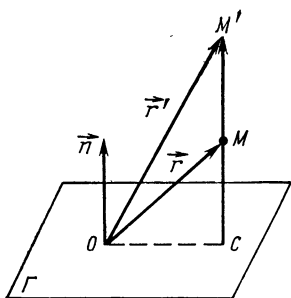


Рис. 13. Растяжение пространства в произвольном направлении  $\vec{n}$ , перпендикулярном к плоскости  $F$

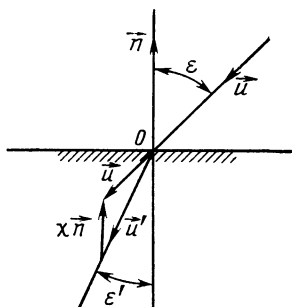


Рис. 14. Переход вектора  $\vec{u}$  в вектор  $\vec{u}'$  при преломлении света

Вводя соответствующие радиус-векторам  $\vec{r}$  и  $\vec{r}'$  одностолбцовые матрицы

$$R = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ и } R' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

получаем матричную запись рассматриваемого линейного преобразования

$$R' = C_K R.$$

Для радиус-векторов  $\vec{r}$  и  $\vec{r}'$  соответственно точек  $M$  и  $M'$  имеем

$$\begin{aligned} \vec{r} &= xi + yj + zk; \\ \vec{r}' &= x'i + y'j + z'k = xi + yj + Kzk, \end{aligned}$$

т. е.

$$\vec{r}' = \vec{r} + (K - 1) zk. \quad (48)$$

Приняв во внимание, что  $z = (\vec{r} \vec{K})$ , окончательно получим

$$\vec{r}' = \vec{r} + (K - 1) (\vec{r} \vec{k}) \vec{k} = \vec{r} + \vec{MM}'.$$

Здесь аппликату  $z$  заменяем более сложным выражением  $\vec{r} \vec{K}$ , имея в виду возможность обобщения рассматриваемого преобразования. Теперь рассмотрим растяжение не вдоль одной из координатных осей, а в произвольном направлении, определяемом ортом  $\vec{n}$  (рис. 13). Проведем через начало координат  $O$  плоскость  $F$ , перпендикулярную  $\vec{n}$ .

Тогда из выражения (48), учитывая, что  $\vec{z} = \vec{r}n$ , имеем

$$\vec{r}' = \vec{r} + (K - 1) (\vec{r}n) \vec{n}.$$

Например, преломление света можно рассматривать как частный случай растяжения (сжатия) пространства вдоль оси, имеющей направление нормали к границе раздела сред.

Закон преломления света может быть представлен в виде следующего векторного уравнения [2]:

$$\vec{u}' \times \vec{n} = \vec{u} \times \vec{n},$$

где  $\vec{u}$  и  $\vec{u}'$  — векторы, имеющие направления падающего и преломленного лучей соответственно, причем длины их равны показателям преломления  $n$  и  $n'$  соответствующих им сред, а  $\vec{n}$  — орт нормали к поверхности раздела сред (рис. 14).

Уравнение (48) можно записать в виде

$$(\vec{u}' - \vec{u}) \times \vec{n} = 0,$$

из которого видно, что вектор  $\vec{u}' - \vec{u}$  коллинеарен  $\vec{n}$ , т. е. отличается от него только скалярным множителем. Обозначив этот множитель  $\chi$ , имеем  $\vec{u}' - \vec{u} = -\chi \vec{n}$ , откуда

$$\vec{u}' = \vec{u} - \chi \vec{n}. \quad (49)$$

В оптике величину  $\chi$  называют астигматической постоянной, или постоянной отклонения.

Сравнивая уравнения (48) и (49), видим, что если начало координат взять в точке преломления луча и векторы  $\vec{u}$  и  $\vec{u}'$  поместить началом в эту точку (так что  $\vec{u} = \vec{r}$  и  $\vec{u}' = \vec{r}'$ ), то эти уравнения совпадут, и мы получим

$$\chi = (1 - K) (\vec{r}n). \quad (50)$$

Следовательно, на преломление светового луча можно смотреть как на растяжение (сжатие) пространства с постоянными для каждого направления падающего луча коэффициентом  $K$  и величиной  $\chi$  и изменяющимися свои значения согласно формулам (49) и (50) при изменении этого направления. Таким образом, при преломлении света одной плоской поверхностью изображение светящейся точки будет получено в виде некоторой линии. Такое искажение изображения носит название сферической аберрации, которая возникает при наличии плоскопараллельной пластины.

## 7. ПРАВИЛА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИСТЕМ КООРДИНАТ

Как известно, виды преобразования систем координат те же, что и преобразования пространства операторами действия ЗПС, т. е. инверсия (изменяется ориентация базисных ортов), сдвиг и поворот. Умение преобразовывать векторы и операторы действия ЗПС из одной системы координат в другую является необходимым условием правильного выполнения расчетов хода лучей через ЗПС.



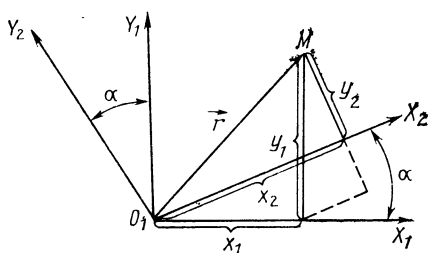


Рис. 15. Преобразование координат точки при повороте системы вокруг одной из ее осей

СК. Условимся ставить задачу и искать ответ в системе координат, которой присвоим первый номер.

Остановимся на решении первой задачи. Запишем матрицу преобразования систем координат вначале для плоской задачи (рис. 15). Координаты точки  $M$  во второй СК связаны с координатами в первой СК зависимостями

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha; \\ y_2 &= -x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Коэффициенты при  $x_1$  и  $y_1$  могут быть представлены в виде матрицы преобразования

$$L_{12} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Такую же, как (51), зависимость между координатами можно получить, разложив орты осей второй системы координат в первой, тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \bar{i}_2 &= \cos \alpha \bar{i}_1 + \sin \alpha \bar{j}_1; \\ \bar{j}_2 &= -\sin \alpha \bar{i}_1 + \cos \alpha \bar{j}_1. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Этот метод удобно использовать для нахождения матрицы преобразования систем координат.

Обратное преобразование координат точки из второй системы в первую описывается матрицей, транспонированной к матрице (52):

$$L_{21} = L^* \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Для решения пространственных задач в наиболее общем виде, когда одна система координат смещена, повернута и имеет другую ориентацию относительно исходной, применяется матрица четвертого порядка вида  $\hat{L}_{12}$ .

При преобразовании систем координат приходится решать следующие задачи.

1. Нахождение матрицы преобразования пространства (плоскости), соответствующего переходу из одной системы координат в другую.

Нахождение координат вектора (точки) в одной системе координат, если задано его положение в другой СК.

3. Нахождение матричного оператора действия ЗС в заданной

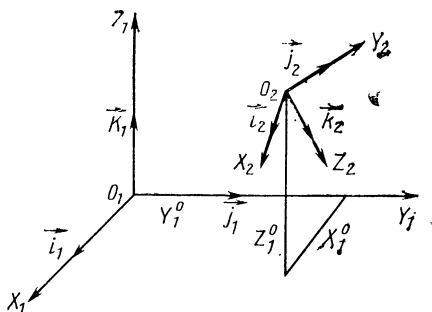


Рис. 16. Преобразование первой системы координат во вторую путем сдвига и поворота

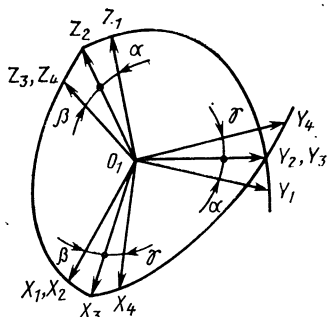


Рис. 17. Схематическое представление тройного поворота системы координат вокруг соответствующих осей  $OX_1$ ,  $OY_2$  и  $OZ_3$

Для преобразования первой системы координат во вторую (рис. 16) будем иметь следующую матрицу четвертого порядка:

$$\hat{L}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^0 & x_2(x_1) & x_2(y_1) & x_2(z_1) \\ y_1^0 & y_2(x_1) & y_2(y_1) & y_2(z_1) \\ z_1^0 & z_2(x_1) & z_2(y_1) & z_2(z_1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^0 & \cos(\vec{i}_2, \vec{i}_1) & \cos(\vec{i}_2, \vec{j}_1) & \cos(\vec{i}_2, \vec{k}_1) \\ y_1^0 & \cos(\vec{j}_2, \vec{i}_1) & \cos(\vec{j}_2, \vec{j}_1) & \cos(\vec{j}_2, \vec{k}_1) \\ z_1^0 & \cos(\vec{k}_2, \vec{i}_1) & \cos(\vec{k}_2, \vec{j}_1) & \cos(\vec{k}_2, \vec{k}_1) \end{pmatrix}. \quad (55)$$

В этой матрице строками в правом нижнем блоке являются условно показанные разложения каждого элемента координатного базиса второй системы координат в координатном базисе первой. Этим способом получения операторов преобразования СК следует широко пользоваться.

Знаки у координат положения начала первой системы координат (блока слева внизу) по отношению к началу второй должны быть противоположными, так как первый базис раскладываем во второй. При использовании матриц четвертого порядка радиус-векторам  $\vec{r}$  ставятся в соответствие однострочные матрицы

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Часто углы между осями базисов двух систем координат бывают не заданы, но известны последовательные повороты вокруг осей СК, в результате которых приходят к новой интересующей системе координат. Например, для перехода к четвертой системе координат (рис. 17) необходимо повернуть первую СК относительно ее оси  $O_1X_1$  против часовой стрелки на угол  $\alpha$ , затем повернуть вторую СК относительно ее оси  $O_1Y_2$  по часовой стрелке на угол  $\beta$  и, наконец, повернуть третью систему координат на угол  $\gamma$  против часовой стрелки относительно ее оси  $O_1Z_3$ . Операторы последовательно-го перехода систем координат имеют вид

$$L_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}; \quad (57a)$$

$$L_{23} = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}; \quad (57б)$$

$$L_{34} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (57в)$$

Общий оператор перехода от первой к четвертой системе координат

$$L_{14} = L_{34}L_{23}L_{12}.$$

Если потребуется пересчитать координаты точки из первой системы в четвертую, то формула будет следующей:

$$R_4 = L_{34}L_{23}L_{12}R_1 = L_{14}R_1. \quad (58)$$

## 8. ОПЕРАТОРЫ ДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЗЕРКАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Условимся обозначать операторы действия ЗС в матричном виде большими буквами  $T$  с индексами внизу, соответствующими виду ЗС и ее номеру. Например, для матричных операторов действия  $OЗ_1ЗР_1$  и  $УЗ_1$  будем иметь  $T_{OЗ_1}$ ,  $T_{ЗР_1}$  и  $T_{УЗ_1}$ .

Оператором действия ЗС называется выраженная некоторым математическим символом (формулой) или просто словесной формулировкой характеристика преобразуемого ею пространства. Оператор полностью определяет действие ЗПС и вместе с тем имеет известную двойственность. С одной стороны, он независим от какой бы то ни было системы координат, например,  $УЗ$  может задаваться угловым базисом  $\varphi$  между зеркалами, а  $ЗР$  линейным базисом  $b$  —

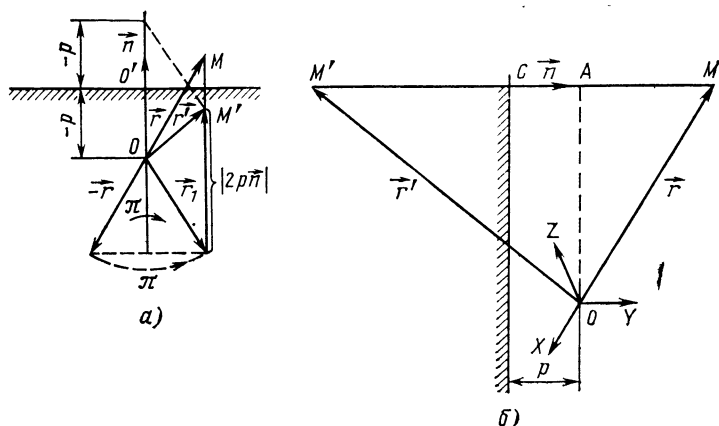


Рис. 18. Оператор действия одиночного зеркала в векторном виде: *а* — точка *М* и начало системы координат с одной стороны зеркала; *б* — с разных сторон

расстоянием между зеркалами; с другой стороны, характер действия ЗС зависит от того, как она расположена в пространстве, важно ее расположение относительно положения объектов, изображаемых ею. Каждая ЗС обладает инвариантным направлением, т. е. такой осью, вращение вокруг которой ЗС не вызывает дополнительного сдвига или поворота векторов.

Действие одиночного зеркала (рис. 18, *а*), как указывалось выше, складывается из трех элементарных преобразований:

- 1) инверсии радиус-вектора  $\vec{r}$  светящейся точки *М* относительно начала координат *O* (радиус-вектор  $-\vec{r}$ );
- 2) поворота радиус-вектора  $-\vec{r}$  вокруг оси  $\vec{n}$  на угол  $\pi$  (радиус-вектор  $\vec{r}_1$ );
- 3) сдвига конца радиус-вектора  $\vec{r}_1$  вдоль оси  $\vec{n}$  на величину  $2p$  (радиус-вектор  $\vec{r}'$ ), где  $p$  определяется равенством  $\vec{OO'} = p\vec{n}$ .

Если орт  $\vec{n}$  направлен к точке *O*, то отклонения  $OO'$  и  $p$  отрицательны; если от точки *O*, то положительны.

Непосредственно из построений рис. 18, *б* получим

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= -2\vec{CM} + \vec{r}; \\ \vec{CM} &= (p + \vec{r}\vec{n})\vec{n},\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\vec{r}' = \vec{r} - 2(\vec{r}\vec{n})\vec{n} - 2p\vec{n}. \quad (59)$$

Это и есть оператор действия ОЗ в векторном виде. Величина  $p$  имеет знак плюс, если наблюдаемый объект находится в том же

полупространстве, что и начало системы координат, в противном случае  $p$  имеет знак минус.

Скалярное произведение векторов в матричном виде записывается так:

$$\vec{r} \vec{n} = R^* N = N^* R, \quad (60)$$

т. е.

$$R^* N = (r_x r_y r_z) \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = r_x n_x + r_y n_y + r_z n_z.$$

Из (59) в матричном виде получим

$$\begin{aligned} R' &= R - 2(R^* N) N - 2pN = R - 2NN^* R - 2pN = \\ &= (E - 2NN^*) R - 2pN = T_{O3} R - 2pN, \end{aligned} \quad (61)$$

где

$$NN^* = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} (n_x n_y n_z) = \begin{pmatrix} n_x^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_x n_y & n_y^2 & n_y n_z \\ n_x n_z & n_y n_z & n_z^2 \end{pmatrix}; \quad (62)$$

$$T_{O3} = E - 2NN^* = \begin{pmatrix} 1 - 2n_x^2 & -2n_x n_y & -2n_x n_z \\ -2n_x n_y & 1 - 2n_y^2 & -2n_y n_z \\ -2n_x n_z & -2n_y n_z & 1 - 2n_z^2 \end{pmatrix}. \quad (63)$$

Оператор действия ОЗ в матричном виде  $T_{O3}$  есть матрица симметрическая.

При параллельном пучке лучей или сходящемся, но когда начало системы координат расположено на зеркале ( $p=0$ ), формула (61) имеет более простой вид

$$R' = T_{O3} R. \quad (64)$$

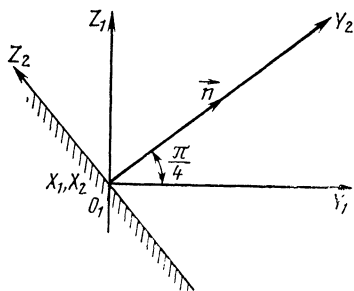


Рис. 19. Матричный оператор действия одиночного зеркала с ортом нормали, расположенным под углом  $\pi/4$  к оси  $OY_1$

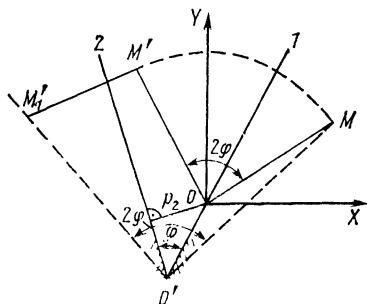


Рис. 20. Сдвиг углового зеркала из точки  $O$  в точку  $O'$

Например, его оператор  $T_{O3}$  из (63) в соответствии с рис. 19, на котором показан след одиночного зеркала  $I$ , равен

$$T_{O3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (65)$$

Если орт нормали  $\vec{n}$  будет направлен в обратную сторону, то  $T_{O3}$  не изменится, так как при этом изменяется и то полупространство, в котором находится рассматриваемый объект.

Еще более простой вид имеет матрица, если с одной из осей системы координат совмещен орт  $\vec{n}$ , а именно для осей  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$  имеем

$$\begin{aligned} T_{O3_{OX}}^0 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & T_{O3_{OY}}^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ T_{O3_{OZ}}^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (66)$$

Такой вид матриц и операторов действия, как указывалось выше, носит название канонических.

Получим теперь с учетом формулы (57а) и  $A_1 = L_{21}A_2L_{12}$  [см. формулу (74)] матрицу действия  $T_{O3_1}$  из матрицы его канонического вида  $T_{O3_2}^0$  (рис. 20), заданной во второй системе координат, повернутой относительно первой на угол  $\alpha = \pi/4$  против часовой стрелки.

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} T_{O3_1} &= L_{21}T_{O3_2}^0L_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & -2 \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, получено выражение (65).

Переходим к определению оператора действия углового зеркала. В этом случае можно учитывать действие каждого зеркала: вначале первого, а затем второго.

На основании формулы (61) получим

$$R'' = T_{O3_2} R' - 2p_2 N_2, \quad (67)$$

где

$$R' = T_{O3_1} R - 2p_1 N_1.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} R'' &= T_{O3_2} T_{O3_1} R - 2T_{O3_2} p_1 N_1 - 2p_2 N_2 = \\ &= T_{Y3} R - 2(T_{O3_2} p_1 N_1 + p_2 N_2) = T_{Y3} R - Q_{Y3}, \end{aligned} \quad (68)$$

где  $Q_{Y3} = 2p_2 = M' M'_1$  — приращение координат, вызванное несовмещением начала СК с ребром  $\vec{e}$  УЗ (рис. 20);  $p_1 = 0$ .

Рассмотрим матричный оператор УЗ:

$$\begin{aligned} T_{Y3} &= T_{O3_2} T_{O3_1} = (1 - 2N_2 N_2^*) (1 - 2N_1 N_1^*) = \\ &= 1 - 2N_1 N_1^* - 2N_2 N_2^* + 4N_2 N_2^* N_1 N_1^* = T_{O3_1} - 2N_2 N_1^* - \\ &\quad - 4N_2 N_1^* \cos \varphi_{12}. \end{aligned} \quad (69)$$

Из последнего выражения для случая, когда ребро УЗ совмещено с осью  $OZ$  системы координат, получим канонический вид матрицы

$$T_{Y3OZ}^0 = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi_{1,2} & -\sin 2\varphi_{1,2} & 0 \\ \sin 2\varphi_{1,2} & \cos 2\varphi_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (70)$$

Действие УЗ равноценно повороту пространства на угол  $2\varphi_{1,2}$  от первого по ходу лучей зеркала ко второму, где  $\varphi_{1,2}$  — угол между зеркалами 1 и 2.

В качестве примера рассмотрим действие УЗ с углом  $\varphi_{1,2} = 45^\circ$ . Призма, имеющая такой угол и поворачивающая пространство на угол  $90^\circ$ , носит название пентапризмы. Матрица действия в канонической форме — оператор пентапризмы для параллельного хода лучей (без учета стекла) для ее ребра  $\vec{e}$ , параллельного оси  $OX$ , имеет вид

$$T_{Y3OX}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\varphi_{1,2} & -\sin 2\varphi_{1,2} \\ 0 & \sin 2\varphi_{1,2} & \cos 2\varphi_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (71)$$

Найдем оператор действия зеркального ромба. Выясним, имеет ли ЗР свойство поворота пространства, для этого подставим в выражение (69) угол  $\varphi_{1,2} = 0$ ; тогда получим

$$T_{ЗР\text{пов}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E, \quad (72)$$

т. е. ЗР не осуществляет какого-либо поворота пространства. Выясним теперь, дает ли ЗР при своем поступательном перемещении сдвиг пространства  $Q_{ЗР}$ . Для этого преобразуем часть выражения (67), относящуюся к УЗ, и приравняем  $Q_{Y3}$  к  $Q_{ЗР}$ . После несложных преобразований при условии, что  $N_1 = -N_2$  и  $p_1 + p_2 = b$

(где  $b$  — расстояние между зеркалами — его линейный базис), получим

$$\begin{aligned} Q_{3P} = T_{3P} &= -2 (T_{O3_2} p_1 N_1 + p_2 N_2) = -2 [(E - 2N_2 N_2^*) \times \\ &\times p_1 N_1 + p_2 N_2] = -2 [(2p_1 N_2 N_2^* N_2 - p_1 N_2) + p_2 N_2 = \\ &= -2bN_2 = 2bN_1. \end{aligned} \quad (73)$$

Таким образом, действие ЗР может быть представлено оператором, осуществляющим параллельный сдвиг пространства на двойной базис  $2b$  в сторону нормали первого зеркала.

## 9. ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА В МАТРИЧНОМ ВИДЕ

Матрица  $A_1$  какого-нибудь линейного преобразования преобразуется к другим координатам по формуле [4]

$$A_1 = L_{21} A_2 L_{12}, \quad (74)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — матрицы одного и того же линейного преобразования в основной и повернутой СК соответственно.

Ввиду важности этой формулы приведен ее вывод. Линейное преобразование точек выражается в основной, первой СК формулой (41)

$$R'_1 = A_1 R_1,$$

а преобразование точек из СК<sub>2</sub> в СК<sub>1</sub> формулой (58)

$$R_1 = L_{21} R_2, \quad (75)$$

поэтому

$$R'_1 = A_1 L_{21} R_2. \quad (76)$$

Здесь точка-образ задана матрицей  $R_2$  в повернутой СК<sub>2</sub>, матрица  $L_{21}$  переводит ее в основную СК<sub>1</sub>, а затем с помощью матрицы  $A_1$  осуществляется ее преобразование в точку-образ, которой соответствует матрица  $R'_1$  в СК<sub>1</sub>.

Для получения образа точки  $R'_2 = L_{12} R'_1$  в СК<sub>2</sub> воспользуемся формулой  $R'_2 = A_2 R_2 = L_{12} A_1 L_{21} R_2$ , из которой видно, что матрица  $A_2 = L_{12} A_1 L_{21}$  является матрицей рассматриваемого линейного преобразования в повернутой СК, что и доказывает формулу (74).

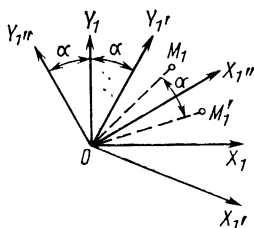


Рис. 21. Геометрическая интерпретация зависимостей между поворотом пространства и поворотом системы координат



Теперь рассмотрим поворот всего пространства на угол  $\alpha$  вокруг начала координат  $O$ . Произвольная точка  $M_1(x_1, y_1)$  преобразуется при этом в точку, которую обозначим  $M_1'(x_1', y_1')$  (рис. 21). Но поворот точки  $M_1$  по отношению к неподвижной системе координат равносильно повороту системы координат в противоположном направлении, т. е. на угол  $\alpha$  по отношению к неподвижной точке, координаты которой при этом меняются на  $x_1'', y_1''$ .

Свяжем с точкой  $M_1$  (рис. 21)  $СК_1'$ , совместно с которой эта точка повернется на угол  $\alpha$  вокруг оси  $O$  и займет положение  $M_1'$ . Координаты этой точки в  $СК_1$  теперь будут

$$R_1(M_1') = L_{1,1} R_1'(M_1').$$

Учитывая, что  $R_1'(M_1') = R_1(M_1)$ , получим

$$R_1(M_1') = L_{1,1} R_1(M_1).$$

С другой стороны, в системе, повернутой относительно  $СК_1$  вокруг точки  $O$  против часовой стрелки на угол  $\alpha$ ,  $СК_1$  принимает индекс  $СК_{1''}$ . В этой  $СК_{1''}$  координаты точки  $M_1$  будут

$$R_{1''}(M_1) = L_{1,1''} R_1(M_1).$$

Для подтверждения тождественности последних двух выражений решением данной задачи следует доказать, что

$$L_{1,1'} = L_{1,1''}.$$

Это же следует из того факта, что оба оператора преобразуют координаты к новым СК, повернутым на один и тот же угол  $\alpha$  в одну и ту же сторону — против часовой стрелки.

Таким образом,  $R_1(M_1') = R_{1''}(M_1)$ , а это означает, что координаты точки  $M_1'$  после поворота точки  $M_1$  на угол  $-\alpha$  по часовой стрелке в  $СК_1$  те же, что и координаты исходной точки  $M_1$ , но в  $СК_{1''}$ , повернутой относительно  $СК_1$  на угол  $\alpha$  против часовой стрелки вокруг одной и той же оси. Полученные соотношения преобразований векторов и СК с помощью матричных операторов  $A$  и  $L$  приведены в табл. 3. Все эти преобразования пространства в сущности базируются на трех полученных выше формулах (74) — (76). Заметим, что  $\det L = 1$ , так как принимаем только правые СК. В наиболее общем виде при выражении действия ЗПС оператором  $A_m$  в  $СК_m$  и заданного преобразователя радиус-вектора  $R_k$  в  $СК_k$  из (75) — (76) получим формулы

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= L_{k1} R_k; \\ A_1 &= L_{m1} A_m L_{1m}; \\ R_1' &= L_{m1} A_m L_{1m} L_{k1} R_k. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Здесь задача решается в  $СК_1$  путем последовательного преобразования в эту СК вектора  $R$  и оператора  $A$ . Однако такой ход решения необязателен. Можно преобразовывать вектор  $R$  непосредственно в ту СК, в которой представлен оператор  $A$ , и затем полученный вектор преобразовывать в  $СК_1$ . Тогда получим следующую формулу:

Таблица 3

Способ преобразования	Преобраз	Преобразование плоскости или пространства	Образ	Формулы, связывающие образ и прообраз
Векторное выражение	$\vec{r}_1$	$A_1$ $A_1^{-1} = A_1^*$	$\vec{r}_1$	$\vec{r}_1' = A_1 \vec{r}_1$ $\vec{r}_1 = A_1^* \vec{r}_1'$
Матричное выражение в основных координатах	$R_1$	$A_1$ $A_1^{-1} = A_1^*$	$R_1'$	$R_1' = A_1 R_1$ $R_1 = A_1^* R_1'$
Преобразование координат	$L_{11} L_{11}$			$L_{11} L_{11}$
Матричное выражение в вспомогательных координатах	$R_2$	$A_2$ $A_2^{-1} = A_2^*$	$R_2'$	$R_2' = A_2 R_2$ $R_2 = A_2^* R_2'$
Формулы преобразования координат и операторов ЗПС	$R_2 = L_{12} R_1$ $R_1 = L_{21} R_2$	$A_1 = L_{21} A_2 L_{12}$ $A_2^* = L_{21} A_2^* L_{12}$ $A_2 = L_{12} A_1 L_{21}$ $A_2^* = L_{12} A_1^* L_{21}$	$R_1' = L_{12} R_1'$ $R_2' = L_{21} R_2'$	$R_2' = L_{12} A_1 L_{21} R_2 = A_2 R_2$ $R_2 = L_{12} A_1^* L_{21} R_2' = A_2^* R_2'$ $R_1' = L_{21} A_2 L_{12} R_1 = A_1 R_1$ $R_1 = L_{21} A_2^* L_{12} R_1' = A_1^* R_1'$

$$R'_1 = L_{m1} A_m L_{km} R_k. \quad (78)$$

Согласно формуле (77) необходимо было бы действовать по правилу

$$R'_1 = L_{51} A_5 L_{15} L_{31} R_3 = L_{21} L_{32} L_{43} L_{54} A_5 L_{45} L_{34} L_{23} L_{12} L_{21} L_{32} R_3,$$

но произведение операторов преобразования СК

$$L_{23} L_{12} L_{21} L_{32} = E,$$

поэтому

$$R'_1 = L_{21} L_{32} L_{43} L_{54} A_5 L_{45} L_{34} R_3. \quad (79)$$

Здесь следует сделать еще одно замечание. Если ЗПС может изменять свое положение, то с ней надо связать новую, подвижную СК, но все формулы преобразований не изменяются.

Может быть еще и такой частный случай: ЗПС задана в СК, предыдущей по отношению к СК<sub>1</sub>, в которой имеется решение задачи, тогда оператор действия этой ЗПС должен быть пересчитан в СК<sub>1</sub>.

Некоторое отличие по сравнению с преобразованием векторов имеет преобразование ортогональной связки векторов.

Вместо преобразования точки или радиус-вектора тем же оператором  $A$  можно задать преобразование, переводящее прямоугольную связку трех векторов — триэдр с матрицей  $S$  — в новую связку векторов — триэдр с матрицей  $S'$ . Образование зависимостей здесь будет несколько иное, нежели у векторов

$$S'_1 = S_1 A_1^*, \quad (80a)$$

или для транспонированных матриц

$$S_1'^* = (S_1 A_1^*)^* = A_1 S_1^*. \quad (80b)$$

В формуле (41) для преобразования векторов выражающие их матрицы  $A_*$  и  $R_*$  нетранспонированные, в этом и заключается различие формул для триэдров и векторов. Это объясняется тем, что вектор представляется однострочковой матрицей, а триэдр дает матричное представление каждого из ортов в виде разложения по строкам. Если задать исходный триэдр, у которого орты совмещены с осями СК<sub>1</sub>, то его матрица  $S_1^*$  будет равна единичной, и тогда выражение (80b) будет иметь вид

$$S_1'^* = A_1 S_1,$$

более похожий на формулу (41). Указанные преобразования относятся не только к операторам  $A$  действия ЗС, но и к операторам преобразования СК:

$$S_2 = S_1 L_{12}^* \quad (81a)$$

или

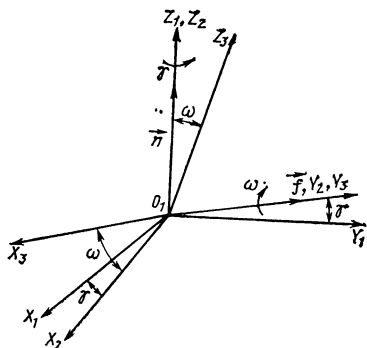
$$S_2^* = L_{12} S_1^*. \quad (81b)$$

Преобразование самих операторов  $A$  действия ЗС из одной СК в другую осуществляется по той же формуле (74), что и для векторов.

## 10. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЗЕРКАЛЬНЫХ СИСТЕМ

К элементарным ЗС отнесем системы ОЗ, УЗ и ЗР. Наиболее сложными ЗС являются составленные из элементарных зеркал тройное зеркало ОЗ и УЗ или ОЗ и ЗР и четверное зеркало

Рис. 22. Матричный оператор преобразования систем координат при последовательных поворотах вокруг осей  $OZ_1$  и  $OY_2$



УЗ и ЗР. Наиболее общими свойствами обладает ОЗ; оно, как указывалось выше, имеет все три вида изометрического преобразования пространства: инверсию, сдвиг и поворот. УЗ и ЗР имеют по одному виду преобразования: УЗ — поворот и ЗР — сдвиг. Отсюда особое внимание должно быть уделено изучению ОЗ. Общие свойства показаны в табл. 4.

Для пояснения приведенных в этой таблице формул решим следующую задачу: найдем матрицу оператора ОЗ с ортом  $\vec{n}$ , коллинеарным оси  $O_1Z_1$ , при его повороте на угол  $\omega$  вокруг оси  $\vec{f}$ , лежащей в плоскости  $X_1O_1Y_1$  и составляющей угол  $\gamma$  с осью  $O_1Y_1$ . В СК<sub>1</sub> оператор действия ОЗ имеет канонический вид (рис. 22)

$$T_{OZ_1}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Вторую СК выберем после поворота СК<sub>1</sub> на угол  $\gamma$  вокруг оси  $O_1Z_1$ . В СК<sub>2</sub> оператор действия ОЗ не изменится, т. е.

$$T_{OZ_1}^0 = T_{OZ_2}^0.$$

Придем к СК<sub>3</sub> поворотом СК<sub>2</sub> вокруг оси  $O_1Y_2$  на угол  $\omega$ . Оператор действия ОЗ в первой СК после его поворота вокруг оси  $O_1Y_2$  имеет вид

$$T_{OZ_1}^{\prime} = L_{21}L_{32}T_{OZ_1}^0L_{23}L_{12} = L_{31}T_{OZ_1}^0L_{13}. \quad (82)$$

Так как [см. формулы (69)]

$$L_{12} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Таблица 4

Свойства ЗС	ОЗ с ортом нормали $\vec{n}$	УЗ с угловым базисом $\Phi$ и ортом $\vec{e}$ ребра $\vec{p}_1$	ЗР с линейным базисом $b$ и ортом нормали первого зеркала $p_1$
Общий характер действия	Поворот на угол $\pi$ вокруг $\vec{n}$ , сдвиг на $2s$ и инверсия, где $s$ — расстояние объекта от ОЗ	Поворот на угол $2\Phi$ вокруг $\vec{e}$ против часовой стрелки, при наблюдении с конца орта $\vec{e}$	Сдвиг на величину $2b$ в направлении $p_1$
Конгруэнтно или неконгруэнтно преобразованное пространство по отношению к исходному	Неконгруэнтно	Конгруэнтно	Конгруэнтно
ЗС неподвижна	Поворот на угол $\pi$ вокруг $\vec{n}$ и инверсия	Поворот на угол $2\Phi$ вокруг $\vec{e}$	Не поворачивает
ЗС поворачивается вокруг произвольной оси $\vec{l}$ на угол $2\eta$ (рис. 23)	<p>В матричном виде</p> $u'_1 = T O_{\vec{Z}_1} \cdot u_1,$ <p>где</p> $T O_{\vec{Z}_1} = L_{21} L_{2\alpha} L_{32} L_{43} L_{4\eta} \times L_{34} L_{3\eta} L_{23} L_{2\beta} L_{12} L_{1\alpha}$ <p><math>T O_{\vec{Z}_1}</math> — оператор ОЗ в СК<sub>3</sub></p> <p>В кватернионном виде</p> $\vec{u}'_1 = \Lambda O_{\vec{Z}_1} \circ u_1 \circ \Lambda O_{\vec{Z}_1},$	<p>где</p> $T u_{\vec{Z}_1} = L_{21} L_{2\alpha} L_{32} L_{43} L_{4\eta} \times L_{34} L_{3\eta} L_{23} L_{2\beta} L_{12} L_{1\alpha}$ <p><math>T u_{\vec{Z}_1}</math> — оператор УЗ в СК<sub>3</sub></p> <p>В кватернионном виде</p> $\vec{u}'_1 = \Lambda u_{\vec{Z}_1} \circ u_1 \circ \Lambda u_{\vec{Z}_1},$	Не поворачивает

		<p>где</p> $\begin{aligned} \Lambda OZ_1 &= \Lambda \vec{f}_{\eta_1} \circ \Lambda OZ_1 = \\ &= (\cos \eta + \vec{f} \sin \eta) \circ \vec{n} = \\ &= \cos \eta \vec{n} - \sin \eta (\vec{f}/n) + \sin \eta \vec{x}/x n \end{aligned}$	<p>где</p> $\begin{aligned} \Lambda YZ_1 &= \Lambda \vec{f}_{\eta_1} \circ \Lambda YZ_1 = \\ &= (\cos \eta + \vec{f} \sin \eta) \circ (\cos \varphi + \\ &\quad + \vec{e} \sin \varphi) \end{aligned}$	
Сдвиг объекта точки	ЗС неподвижна на	Сдвиг на $2s$ по направлению от точки к ОЗ с соответствующим поворотом	Не сдвигает, только поворачивает	Сдвиг на $2b$ в направлении $\vec{n}_1$
	ЗС сдвигается в произвольном направлении	Сдвиг по направлению $\vec{n}$ на величину $s' = 2s \cos \beta$ , где $\beta$ — угол между направлением сдвига и $\vec{n}$	Поворот сохраняется исходный, но в результате сдвига УЗ объект сдвигается в плоскости, перпендикулярной к $\vec{e}$ , на величину $s' = 2 \cos \beta \sin \varphi$ по направлению, составляющему угол $\pi/2 - \varphi$ к направлению сдвига УЗ, отложенному в сторону, противоположную повороту пространства УЗ, где $\beta$ — угол между направлением сдвига и плоскостью, перпендикулярной к $\vec{e}$	Не дает дополнительного сдвига

$$L_{23} = \begin{pmatrix} \cos \omega & 0 & \sin \omega \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \omega & 0 & \cos \omega \end{pmatrix},$$

$$L_{13} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \omega & -\sin \gamma \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ \sin \omega \cos \gamma & -\sin \omega \sin \gamma & \cos \omega \end{pmatrix}.$$

Для оператора ОЗ после его поворота на угол  $\omega$  получим

$$T'_{OZ_1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma \cos 2\omega & \cos \gamma \sin \gamma (1 - \cos 2\omega) & \cos \gamma \sin 2\omega \\ \cos \gamma \sin \gamma (1 - \cos 2\omega) & \cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma \cos 2\omega & -\sin \gamma \sin 2\omega \\ \sin 2\omega \cos \gamma & -\sin 2\omega \sin \gamma & -\cos 2\omega \end{pmatrix}.$$

В частном случае при  $\omega = \gamma = \pi/4$  имеем

$$T'_{OZ_1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получена, как и следовало ожидать, симметрическая матрица. Другой подход к получению матрицы  $T'_{OZ_1}$  заключается в следующем. Вначале находят координаты орта нормали  $\vec{n}$  в СК<sub>1</sub> после поворота ОЗ вокруг оси  $\vec{j}$  на угол  $\omega$ , причем матрица этого орта

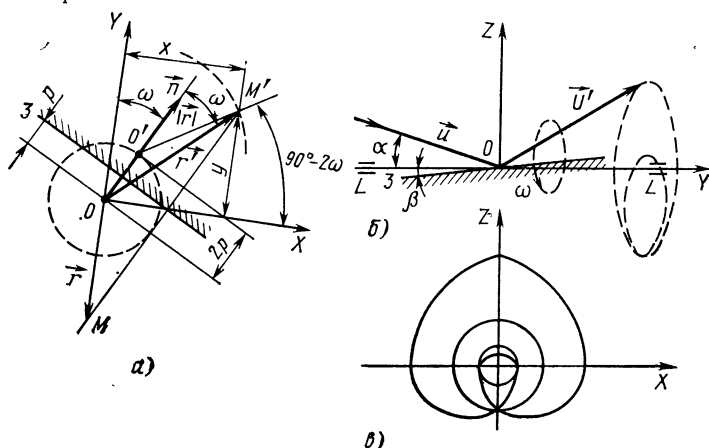


Рис. 23. Действие вращающегося одиночного зеркала на положение изображения точки М:

а — интерпретация получения траектории изображения точки М в результате сложения двух движений: точки О' по окружности радиуса ОО' со скоростью движения зеркала и по окружности радиуса  $|\vec{r}|$  с началом в точке О', с двойной скоростью; б — след отраженного луча  $\vec{u}'$  на плоскости, перпендикулярной к оси LL вращения зеркала; в — траектории изображения точки при различных положениях оси вращения по отношению к зеркалу

$$N_{OZ_1} = \begin{pmatrix} -\sin \omega \cos \gamma \\ -\sin \omega \sin \gamma \\ \cos \omega \end{pmatrix}.$$

Далее по формуле (63) находят оператор  $T'_{OZ_1}$ .

При вращении ОЗ вокруг оси  $O$ , перпендикулярной чертежу (рис. 23, а), точка  $M'$  изображения точки  $M$  будет участвовать в двух движениях: она будет находиться на окружности радиуса  $O'M' = |r| = r$ , центр которой сам расположен на окружности радиуса  $OO' = 2p$ . Причем радиус  $OO'$  первой окружности поворачивается на угол  $\omega$ , а радиус  $O'M'$  — на угол  $2\omega$ . Объясняется это свойствами ОЗ — сдвигом изображения точки и поворотом векторов, поэтому координаты точки  $M'$  будут

$$\left. \begin{aligned} x'_M &= r \sin 2\omega + 2p \sin \omega; \\ y'_M &= r \cos 2\omega + 2p \cos \omega. \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Полученное выражение (рис. 23, б, в) есть записанное в параметрической форме уравнение улитки Паскаля [4].

Перейдем к определению сдвига и поворота ОЗ по приращению вектора  $\vec{\Delta r}' = \Delta R'$  изображения точки.

В процессе сборки прибора и при его юстировке очень важно уметь определять по значению смещения изображения ошибки в положении зеркал. Определение коэффициентов влияния подвижек каждого зеркала по соответствующему смещению изображения дает возможность создать более правильную методику юстировки.

Приведем формулы, не останавливаясь подробно на их выводе [4].

Искомые значения приращений  $\Delta n$  и  $\Delta p$  полностью характеризуют положение зеркала (рис. 24), так как плоскость определяется тремя параметрами, в качестве которых можно выбрать расстояние  $P$  плоскости от начала координат и два угла, образуемых нормалью с двумя координатными осями. Формулы выводятся на основе известного векторного уравнения для отражения в плоском зеркале [27]:

$$\vec{r}' = \vec{r} - 2[(\vec{r} \vec{n}) - p] \vec{n} = r - 2s \vec{n}.$$

В матричном виде можно записать их так [8]:

$$\Delta N = \frac{2SN - \Delta R'}{\sqrt{(2SN^* - \Delta R'^*)(2SN - \Delta R')}} - N \approx \frac{\Delta R'}{2S} = \frac{\Delta r'}{2S}; \quad (84)$$

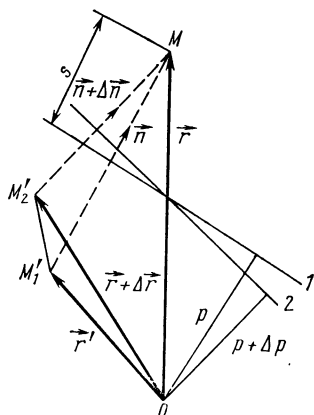


Рис. 24. Определение сдвига и поворота одиночного зеркала по заданному вектору  $\vec{\Delta r}'$  приращения положения изображения точки



$$\Delta P = \frac{\left(R^* - SN^* + \frac{1}{2} \Delta R'^*\right)(2SN - \Delta R')}{(2SN^* - \Delta R'^*)(2SN - \Delta R')} - P \approx \left(N^* - \frac{1}{2} R^*\right) \Delta R'. \quad (85)$$

Последнее при условии, что  $|\vec{\Delta r}| \ll 2s$ .

Необходимо отметить, что  $\Delta p$  и  $\vec{\Delta n}$  не зависят один от другого; это следует из приведенных формул, которые дают однозначную зависимость искомых параметров только от  $\vec{\Delta r'}$ .

## ПРИВЕДЕНИЕ ТРЕХ ЗЕРКАЛЬНЫХ СИСТЕМ К ПРОСТЕЙШИМ ВИДАМ

### 1. ПОНЯТИЕ ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ ЗЕРКАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Под инвариантностью ЗПС понимают наличие определенным образом ориентированных относительно нее направлений, вращение вокруг которых и сдвиг вдоль которых не изменяют положения точки изображения. Инвариантность вытекает из самого характера преобразования пространства той или иной ЗПС.

Таким образом, инвариантность ЗПС связана только с внутренними ее свойствами и не зависит от ее ориентации относительно пространства, в котором она представлена. Инвариантность будем называть полной для такого направления, поступательное смещение ЗПС вдоль которого или вращение относительно которого не изменяют положения образов, и просто инвариантность смещений или поворотов в зависимости от того, относится она только к смещениям или только к поворотам.

Математически понятие об инвариантности связывается с понятием векторов или точек, на которые данные преобразования не оказывают никакого воздействия. Такие векторы или точки называются собственными, они при данном преобразовании пространства изображаются сами в себя.

Инвариантность различных видов ЗПС для поступательного их смещения, которая, естественно, относится только к сходящемуся ходу лучей, и для поворотов, которая относится как к сходящемуся (расходящемуся), так и к параллельному ходу лучей, приведена в табл. 5.

ЗПС 4, 5 и 6 имеют инвариантный вид, когда в 4-й ЗПС ОЗ перпендикулярен ЗР, в 5-й ОЗ перпендикулярен УЗ и в 6-й ЗР перпендикулярен УЗ. Следует отметить, что ЗР осуществляет только сдвиг пространства при его повороте вокруг осей, не коллинеарных нормальям отражающих поверхностей. УЗ дает сдвиг пространства в результате поворота при его сдвигах вдоль направлений, не коллинеарных его ребру, или при поворотах вокруг осей, коллинеарных его ребру. Последнее легко доказывается, исходя из инвариантности направления, совмещенного с его ребром. Действительно, всякий поворот УЗ вокруг оси, коллинеарной его ребру, можно рассматривать как поступательный сдвиг УЗ по радиусу окружности, равному расстоянию его ребра от оси вращения. Одновременно отметим, что при этом изображение наблюдаемого объекта будет смещаться также по окружности.

Для определения инвариантных направлений сложных ЗПС (4, 5 или 6) надо находить их канонический вид. Наиболее сложным является разыскание канонического вида ЗПС, состоящей из ОЗ и УЗ.

Т а б л и ц а 5

№ п/п	Вид ЗПС	Инвариантные направления по сдвигу изображения		Инвариантные направления по повороту изображения		Полностью инвариантные направления
		ЗПС сдвигается	ЗПС поворачивается	ЗПС поворачивается	ЗПС сдвигается и поворачивается	
1	ОЗ	Любые в плоскости ОЗ	Перпендикулярные к плоскости ОЗ	Направления, нормаль ОЗ	Не имеет	Полностью инвариантные направления к зеркалам
2	ЗР	Любые	Перпендикулярные к плоскостям ЗР	Любые	Направления, коллинеарные нормаль к зеркалам	
3	УЗ	Вдоль ребра УЗ	Совмещенное с ребром УЗ	Направления, коллинеарные ребру УЗ	Направление, совмещенное с ребром УЗ	
4	ОЗ и ЗР	Любые в плоскости ОЗ	Не имеет	Направления, коллинеарные нормаль	Не имеет	
5	ОЗ и УЗ	Не имеет	Совмещенное с ребром УЗ (нормалью ОЗ)	Направления, коллинеарные ребру УЗ и коллинеарные нормаль ОЗ	То же	
6	ЗР и УЗ	Вдоль ребра УЗ	Совмещенное с ребром УЗ	Направления, коллинеарные ребру УЗ	Направление, совмещенное с ребром УЗ	

## 2. КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ ПЛОСКИХ ЗЕРКАЛ

Как указано выше, ОЗ, ЗР и УЗ являются элементарными ЗС, все остальные системы зеркал представляют собой комбинации этих трех основных (табл. 6).

Говоря о числе зеркал более двух, имеют в виду не фактическое число зеркал, а число отражений в них.

Два последовательных зеркальных ромба можно заменить одним зеркальным ромбом (сложив два параллельных переноса пространства по правилу сложения векторов). Аналогично два последовательно расположенных угловых зеркала можно заменить одним угловым зеркалом. Учитывая это и комбинируя три элементарные системы, получаем следующие шесть различных зеркальных систем, не приводимых к более простым.

1. Одиночное зеркало.

2. Двойное зеркало. Если плоскости зеркал пересекаются, имеют угловое зеркало. Если плоскости зеркал параллельны — зеркальный ромб.

3. Тройное зеркало (ТЗ). Если плоскости трех зеркал пересекаются по одной прямой, то эта ЗС заменяется ОЗ, если два из них не параллельны одно другому, то ТЗ состоит из УЗ и ОЗ, если параллельны, то оно состоит из ЗР и ОЗ.

4. Четверное зеркало (ЧЗ). Если три последовательно расположенных зеркала не пересекаются по одной прямой и три из них не параллельны друг другу, то ЗС приводится к УЗ и ЗР.

5. Пятерное зеркало (ПЗ). Здесь требует рассмотрения лишь случай, когда систему можно представить в виде ОЗ, УЗ, ЗР или ЗР, УЗ и ОЗ, т. е. в виде четверной ЗС, дополненной установленным перед нею или после нее еще одним зеркалом. Если это одно зеркало не параллельно второму или четверному зеркалу соответственно, то мы имеем случай двух УЗ, который сводится к одному УЗ.

Таким образом, нужно рассмотреть только такое пятерное зеркало, которое составлено из ЗР, ОЗ и ЗР. Дальше будет доказано, что оно заменимо тройным зеркалом.

Докажем, что система из шести зеркал всегда может быть заменена равносильной ей системой из меньшего числа зеркал. Так как комбинация из двух угловых зеркал заменяется одним УЗ и комбинация из двух ЗР заменяется одним ЗР, то достаточно рассмотреть только следующие сочетания: ЗР, УЗ, ЗР и УЗ, ЗР, УЗ.

Для упрощения рассмотрения обозначим зеркала номерами I, II, III, IV, V, VI. Зеркала I и II образуют ЗР, III и IV — УЗ, V—VI — ЗР. Если зеркало III параллельно II, то имеем три параллельных зеркала — I, II и III, которые можно заменить одним. Аналогично, если IV зеркало параллельно V, то зеркала IV, V и VI можно заменить одним зеркалом. Если же зеркало III не параллельно II и зеркало IV не параллельно V, то II и III, так же как зеркала IV и V, образуют УЗ, а два последовательных УЗ можно заменить одним.

Зеркала I и II образуют УЗ, III и IV — ЗР, V и VI — УЗ. Если зеркало II или V параллельно зеркалам III и IV, то имеем три параллельных зеркала, которые можно заменить одним зеркалом. В противном случае имеем два последовательных УЗ из зеркал II и III из IV и V, которые можно заменить одним УЗ.

Таблица 6

Тип и класс ЗПС по И. В. Лебедеву [13]	Вид ЗПС	Вид преобразования пространства	Независимые параметры, определяющие положение зеркальной системы		Канонический вид матрицы	Соответствующая система координат (орт $\rightarrow k$ коллинеарен оси $OZ$ )	Примечание
			в сходящихся пучках лучей	в параллельных пучках лучей			
Элементарные зеркальные системы							
Б.2	ОЗ	Зеркальное	Два направляющих угла орта нормали зеркала и расстояние зеркала от начала системы координат	Два направляющих угла орта нормали зеркала	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\rightarrow k$ коллинеарен $n$	—
Б.16	ЗР	Сдвиг	Два направляющих угла орта нормали ромба и линейный базис [конструктивный параметр (внутренний) — линейный базис ЗР]	Не имеет	$E$	Любая	—
А.1а	УЗ	Поворот	Два направляющих угла орта ребра углового зеркала, две координаты какой-нибудь точки на ребре и угол между зеркалами в угловом зеркале (конструктивный параметр—угловой базис УЗ)	Два направляющих угла орта ребра углового зеркала и угол между его зеркалами (конструктивный параметр — угловой базис УЗ)	$\begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi & 0 \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\rightarrow k$ коллинеарен $e$	—
Сочетания элементарных зеркальных систем							
В.2	ЗР и ОЗ*	Зеркальное с сдвигом	Два направляющих угла орта нормали одиночного зеркала, расстояние его от начала координат и линейный базис ЗР (конструктивный параметр — линейный базис ЗР)	Два направляющих угла орта нормали одиночного зеркала	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\rightarrow k$ коллинеарен $n_3$	Данный тип ЗПС отличается от Б.2 выражением для $Q$

Тип и класс ЗПС по И. В. Деву [13]	Вид ЗПС	Вид преобразования пространства	Независимые параметры, определяющие положение зеркальной системы		Канонический вид матрицы	Соответствующая система координат (орт $\vec{k}$ коллинеарен оси $OZ$ )	Примечание
			в сходящихся пучках лучей	в параллельных пучках лучей			
A.2	УЗ и ОЗ	Зеркальное поворотом	Два направляющих угла орта ребра углового зеркала, две координаты какой-нибудь точки на ребре, угол между зеркалами, направляющих угла орта нормального зеркала и его расстояние от начала координат (конструктивный параметр — угловой базис УЗ)	Два направляющих угла орта ребра углового зеркала, угол между его зеркалами, направляющих угла орта нормали одиночного зеркала (конструктивный параметр — угловой базис УЗ)	$\begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi & 0 \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\rightarrow \vec{k}$ коллинеарен направлению ЗС	Угол $\varphi$ определяется из решения характеристического уравнения
A.16	УЗ и ЗР или ЗР и УЗ (нормаль ЗР коллинеарна ребру УЗ)	Поворот со сдвигом — винтообразное преобразование	Два направляющих угла орта ребра углового зеркала, две координаты какой-нибудь точки на ребре, угол между его зеркалами и линейный базис зеркального ромба (конструктивные параметры — линейный базис ЗР и угловой базис УЗ)	Два направляющих угла орта ребра углового зеркала (конструктивный параметр — угловой базис УЗ)	$\begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi & 0 \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\rightarrow \vec{k}$ коллинеарен ребру углового зеркала	Данный тип ЗПС отличается от А.1а выражением для сдвига $Q$

\* К нему приводится пятое зеркало.

Итак, система из шести зеркал всегда заменяется системой из четырех зеркал (или меньше).

### 3. ТРОЙНЫЕ ЗЕРКАЛА, СОСТОЯЩИЕ ИЗ ОДИНОЧНОГО И УГЛОВОГО ЗЕРКАЛ

Тройное зеркало может задаваться различными способами: тремя ортами нормалей зеркал, ребрами зеркал 1—2 и 2—3 и углом между ними (рис. 25), а также ортом нормали одного зеркала и ребром — линией пересечения двух других зеркал. Наиболее простые выражения получаются при последнем способе задания зеркал, поэтому им и будем пользоваться. Во всяком случае, как бы ни были заданы зеркала, определение их нормалей или ребер последовательно расположенных зеркал не представляет труда.

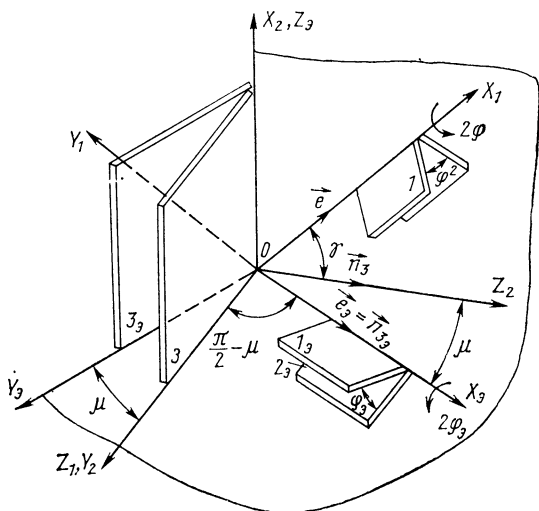


Рис. 25. Положение исходной трехзеркальной системы — зеркала 1, 2 и 3 и системы, эквивалентной ей, — зеркала 1а, 2а и 3а с инвариантной осью  $\vec{e}_3 = \vec{n}_3$ , расположенной вдоль оси  $OX_3$

Направим ребро  $U_3$ , состоящего из зеркал 1 и 2 по оси  $OX_1$ , а ось  $OZ_1$  расположим в плоскости зеркала 3, начало системы координат  $O$  совместим с общей точкой пересечения трех зеркал. Вторую систему координат  $OX_2Y_2Z_2$  выберем так, чтобы ось  $OZ_2$  была совмещена с ортом нормали  $\vec{n}_3$  зеркала 3, а ось  $OY_2$  с осью  $OZ_1$ .

Матрица действия  $T_{T_3}$  тройного зеркала в системе координат  $OX_2Y_2Z_2$  запишется в виде

$$T_{T_3} = T_{O_3}^0 L_{12} T_{U_3}^0 L_{21}, \quad (86)$$

где  $T_{OZ_2}^0$  и  $T_{UZ_1}^0$  — матрицы действия ОЗ и УЗ канонического вида соответственно во второй и первой системах координат;  $L_{12}$  и  $L_{21}$  — матрицы преобразования системы координат от первой ко второй и обратно.

Используя выражения (66), (71), и

$$L_{12} = L_{OX_2} L_{OZ_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ -\cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \end{pmatrix}. \quad (87)$$

и произведя перемножение матриц в соответствии с (86), получим

$$T_{T_{Z_2}} = \\ = \begin{pmatrix} \sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma \cos 2\varphi & -\cos \gamma \sin 2\varphi & \sin \gamma \cos \gamma (1 - \cos 2\varphi) \\ \sin 2\sigma \cos \gamma & \cos 2\varphi & -\sin \gamma \sin 2\varphi \\ -\cos \gamma \sin \gamma (1 - \cos 2\varphi) & -\sin \gamma \sin 2\varphi & -\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma \cos 2\varphi \end{pmatrix}. \quad (88)$$

Эта матрица представляет собой оператор линейного преобразования пространства тройным зеркалом, отнесенный к системе координат  $OX_2Y_2Z_2$ . Основываясь на свойстве инвариантности данной ЗС для вектора  $\vec{u}$  с матрицей  $U$ , коллинеарного инвариантной оси системы, можно написать

$$T_{T_{Z_2}} U = \lambda \vec{u},$$

где  $U$  — матрица из координат некоторого задаваемого вектора  $\vec{u}$ , обладающего указанным свойством;  $\lambda$  — число, называемое собственным значением данного линейного преобразования.

Умножая правую часть на единичную матрицу  $E$  и перенося ее влево, найдем

$$(T_{T_{Z_2}} - \lambda E) U = 0. \quad (89)$$

Выражение  $\lambda E$  в скобках представляет собой преобразование пространства над вектором  $\vec{u}$ , которое не изменяет его направления.

Выражения (88) и (89) приводят к системе однородных скалярных уравнений

$$\left. \begin{aligned} (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma \cos 2\varphi - \lambda) u_{x_2} - \cos \gamma \sin 2\varphi u_{y_2} + \\ + \sin \gamma \cos \gamma (1 - \cos 2\varphi) u_{z_2} &= 0; \\ \sin 2\varphi \cos \gamma u_{x_2} + (\cos 2\varphi - \lambda) u_{y_2} - \sin \gamma \sin 2\varphi u_{z_2} &= 0; \\ -\cos \gamma \sin \gamma (1 - \cos 2\varphi) u_{x_2} - \sin \gamma \sin 2\varphi u_{y_2} + \\ + (\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma \cos 2\varphi - \lambda) u_{z_2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Определитель этой однородной системы уравнений должен быть равен нулю, если необходимо получить ненулевое решение. Это



приводит к характеристическому уравнению третьей степени относительно  $\lambda$  [4, с. 84]. Учитывая, что один из корней вещественный ( $\lambda_3 = -1$ ), уравнение приводится к уравнению второй степени

$$\lambda^2 - (S_1 + 1)\lambda + 1 = 0, \quad (91)$$

где  $S_1$  — след матрицы — сумма элементов, расположенных по главной диагонали ( $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ ).

Корни этого уравнения

$$\lambda_1 = e^{i2\varphi_3} = \cos 2\varphi_3 + i \sin 2\varphi_3;$$

$$\lambda_2 = e^{-i2\varphi_3} = \cos 2\varphi_3 - i \sin 2\varphi_3,$$

где  $2\varphi_3$  — угол поворота пространства.

В связи с этим множитель  $(S_1 + 1) = 2 \cos 2\varphi_3$ , что с учетом выражения (88) дает

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi_3 &= 1 + \sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma \cos 2\varphi + \cos 2\varphi - \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma \cos 2\varphi = \\ &= \sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (92)$$

Мнимость корней  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  говорит о том, что при преобразовании плоскости инвариантные направления отсутствуют, а это значит, что преобразованием является поворот пространства на угол  $2\varphi_3$ .

Отсюда после преобразований получим, что угловой базис эквивалентного УЗ

$$\varphi_3 = \pm \arcsin(\sin \varphi \cos \gamma). \quad (93)$$

При угле  $\gamma = 0$  угловой базис эквивалентного УЗ остается равным угловому базису исходного. При  $\gamma = \pi/2$  и любом угле  $\varphi$  угловой базис эквивалентного УЗ становится равным нулю, и само УЗ перестает существовать. В этом случае имеются три компланарных зеркала, пересекающихся по одной прямой, что приводит к одному зеркалу. Формула (93) нужна не только для анализа ЗС, но и для их синтеза.

Для нахождения координат вектора  $\vec{u}$ , представляющего собой инвариантную ось ЗС, решим систему уравнений (90) (например, по формулам Крамера), тогда

$$\vec{u} = 0 \cdot \vec{i} + \sin \gamma \sin \varphi \vec{j} + \cos \varphi \vec{k}.$$

Равенство нулю координаты по оси  $OX_2$  говорит о том, что этот вектор расположен в плоскости  $Y_0OZ_3$  (см. рис. 25); орт этого вектора

$$\begin{aligned} \vec{e}_3 &= \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = 0 \cdot \vec{i} + \frac{\sin \gamma \sin \varphi}{\sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}} \vec{j} + \\ &+ \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}} \vec{k}. \end{aligned} \quad (94)$$

Угол между ортом  $\vec{e}_3$  и осью  $OZ_2$  определим из выражения (94):

$$\mu = \arccos \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}}. \quad (95)$$

Полученные формулы могут быть проверены, если матрицу оператора действия эквивалентной ЗС, представленной в системе координат  $OX_3Y_3Z_3$ , преобразовать к системе координат  $OX_2Y_2Z_2$  и сравнить с формулой (88). При этом должно быть справедливо равенство

$$T_{T3_2} = L_{3_2} T_{T3_3}^0 L_{23}, \quad (96)$$

где

$$T_{T3_3} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi_3 & \sin 2\varphi_3 & 0 \\ -\sin 2\varphi_3 & \cos 2\varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$L_{3_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \mu & \sin \mu \\ 0 & -\sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix}.$$

Орты ребра  $Y_3Z_3 \xrightarrow{e}$  и нормали  $OZ_3 \xrightarrow{n_3}$  (теперь совмещенные), показывающие направление инвариантной оси, будут расположены в плоскости  $Y_2O_2Z_2$  под углом  $\mu$  к оси  $OZ_2$ , отложенным по часовой стрелке, если смотреть с конца оси  $OX_2$ .

Те же результаты значительно проще математически можно получить с помощью алгебры кватернионов (см. гл. 5). Оператор действия  $OZ$  в кватернионном виде из выражения (20) с учетом того, что для  $OZ \xrightarrow{e} \xrightarrow{n}$ , а угол  $\varphi = \pi$ , будет

$$\Lambda_{OZ} = \xrightarrow{n}.$$

Кватернионный оператор тройного зеркала, состоящего из зеркал с операторами  $\xrightarrow{n_1}$ ,  $\xrightarrow{n_2}$  и  $\xrightarrow{n_3}$ , с учетом формулы перемножения кватернионов (19), имеет вид

$$\begin{aligned} \Lambda_{T3} &= \xrightarrow{n_3} \circ \xrightarrow{n_2} \circ \xrightarrow{n_1} = \Lambda_{Y3} \circ \xrightarrow{n_1} = (\cos \varphi + \xrightarrow{e} \sin \varphi) \circ \xrightarrow{n_1} = \\ &= -\sin \varphi (\xrightarrow{e} \xrightarrow{n_1}) + \cos \varphi \xrightarrow{n_1} + \sin \varphi \xrightarrow{e} \times \xrightarrow{n_1}. \end{aligned} \quad (97)$$

Здесь последовательность отражений  $Y3 \rightarrow O3$  при учете последовательности  $O3 \rightarrow Y3$  по выражению (97) принимает вид

$$\begin{aligned} \Lambda_{T3} &= \xrightarrow{n_3} \circ \xrightarrow{n_2} \circ \xrightarrow{n_1} = \xrightarrow{n_3} \circ \Lambda_{Y3} = \\ &= \xrightarrow{n_3} \circ (\cos \varphi + \xrightarrow{e} \sin \varphi) = \\ &= -(\xrightarrow{e} \xrightarrow{n_3}) \sin \varphi + \xrightarrow{n_3} \cos \varphi - \sin \varphi \xrightarrow{e} \times \xrightarrow{n_3}. \end{aligned} \quad (98)$$

Выражения для кватернионов (97) и (98) различаются по виду лишь знаком третьего члена.

Канонический вид кватерниона  $\Lambda_{T3}^0$  можно получить из (98), если считать, что орты  $\xrightarrow{e}$  и  $\xrightarrow{n_3}$  коллинеарны. При этом  $\xrightarrow{e} \xrightarrow{n_3} = 1$ ,  $\xrightarrow{e} \times \xrightarrow{n_3} = 0$ , а  $\varphi$  перейдет в  $\varphi_3$  и  $\xrightarrow{n_3}$  в  $\xrightarrow{n_{3_3}} = \xrightarrow{e_3}$ , и, следовательно,

$$\Lambda_{T3}^0 = -\sin \varphi_3 + \vec{e} \cos \varphi_3. \quad (99)$$

То же выражение можно получить и из (97). Это доказывает, что в ЗС канонического вида последовательности отражения лучей  $УЗ \rightarrow ОЗ$  и  $ОЗ \rightarrow УЗ$  равнозначны.

Из сравнения скалярных и векторных частей выражений (98) и (99) имеем

$$\begin{aligned} \sin \varphi_3 &= \vec{e} \vec{n}_3 \sin \varphi = \cos \gamma \sin \varphi; \\ \vec{e}_3 &= \frac{\vec{n}_3 \cos \varphi + \vec{n}_3 \times \vec{e} \sin \varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 \gamma \sin^2 \varphi}}. \end{aligned}$$

Полагая  $\vec{n}_3 = \vec{k}$  (см. рис. 25),  $\vec{n}_3 \times \vec{e} = \vec{j}$ , получим ранее выведенные выражения (93) и (94).

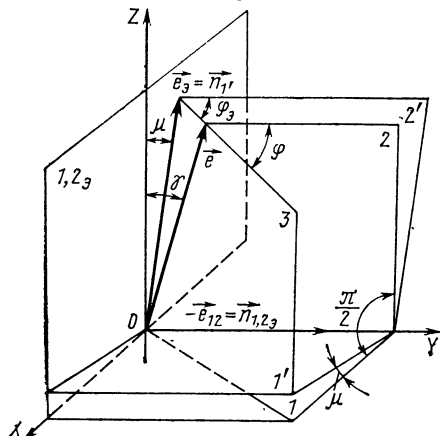


Рис. 26. Преобразование трехзеркальной системы методом вращения двух зеркал вокруг их ребра

Проведенные теоретические исследования хотя и являются весьма важными для общих представлений о методах расчета зеркальных систем, несколько сложны в практическом использовании.

В связи с этим предлагаем наглядный метод получения тех же параметров тройных зеркал чисто геометрически с использованием свойства инвариантности  $УЗ$ .

Исходная трехзеркальная система состоит из зеркал 1, 2, 3 с общей точкой  $O$  их пересечения (рис. 26). Угол между ортом ребра  $\vec{e}$   $УЗ$ , составленного из зеркал 2 и

3, и ортом нормали  $\vec{n}_1$  зеркала 1 обозначен, как и прежде,  $\gamma$ . Используя свойство инвариантности направления  $\vec{e}$  для зеркал 2 и 3, составляющих  $УЗ$  с угловым базисом  $\varphi$ , установим зеркало 2 перпендикулярно к зеркалу 1. Далее заменим образовавшееся  $УЗ$  из зеркал 1 и 2 с угловым базисом  $\pi/2$  одним  $ОЗ$  1, 2<sub>а</sub>, перпендикулярным к их ребру, имея в виду, что при этом направление падающих лучей должно измениться на обратное, или матричное представление  $ОЗ$  умножается на минус единицу. Теперь получена система из зеркал 3 и 1, 2<sub>а</sub>, пересекающихся по прямой  $\vec{e}_3$ , которая является ортом ребра этого  $УЗ$  и инвариантным направлением для всей системы.

Для определения направления  $\vec{e}_3$  и угла  $\varphi_3$  найдем матрицы  $N_3$  и  $N_{1,2a}$  из координат зеркал 3 и 1, 2<sub>а</sub>:

$$N_3 = \begin{pmatrix} & -\cos \varphi \\ \sin \varphi & \cos \gamma \\ -\sin \varphi & \sin \gamma \end{pmatrix}; \quad N_{12_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Угол  $\varphi_3''$  между оортами нормалей зеркал 3 и 1, 2<sub>3</sub> получим из скалярного произведения

$$\cos \varphi_3'' = \vec{n}_3 \vec{n}_{12_3} = \sin \varphi \cos \gamma. \quad (100)$$

Угловой базис УЗ между зеркалами 3 и 1, 2<sub>3</sub>

$$\varphi_3' = \pi - \varphi_3'' = \pi - \arccos(\sin \varphi \cos \gamma). \quad (101)$$

Нас интересует угол между зеркалами 3 и 2', который с учетом того, что угол между зеркалами 1 и 2<sub>3</sub> и зеркалом 2' равен  $\pi/2$ , определим так:

$$\varphi_3 = \varphi_3' - \pi/2 = \pi/2 = \arccos(\sin \varphi \cos \gamma)$$

или

$$\varphi_3 = \arcsin(\sin \varphi \cos \gamma).$$

Орт инвариантного направления находим с учетом (101)

$$\begin{aligned} \vec{e}_3 &= \frac{1}{\sin \varphi_3''} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\cos \varphi & \sin \varphi \cos \gamma & -\sin \varphi \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\sin \varphi \sin \gamma \vec{i} - \cos \varphi \vec{k}}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \gamma}}. \end{aligned} \quad (102)$$

Матрица из координат орта  $\vec{e}_3$  имеет тот же вид, что и (94), но в повернутой СК

$$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sin \varphi \sin \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \gamma}} \vec{i} \\ 0 \vec{j} \\ -\frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \gamma}} \vec{k} \end{pmatrix}. \quad (103)$$

Теперь произведем вторичную замену зеркал, связанную с наличием минуса перед матрицей зеркала 1, 2<sub>3</sub> — обратным ходом лучей. Минус перед матрицей можно представить как единичную матрицу  $E$  со знаком минус, которая по своему действию аналогична триэдру — тройному зеркалу с углами между зеркалами, равными  $\pi/2$ . Действие триэдра не изменяется, если его произвольно поворачивать вокруг вершины — неизменной точки. Поэтому, поместив его вершину в точку  $O$  (см. рис. 26), совместим одно из его ребер с ортом  $\vec{e}_3$ , а одно из его зеркал с плоскостью зеркала 1, 2<sub>3</sub>, но так, чтобы его нормаль была направлена в проти-

воположную сторону орта  $\vec{n}_{1,2}$ . Тогда действие зеркала 1, 2, будет исключено, и у нас останется зеркало 3 и два зеркала от триэдра — 1' и 2'. Таким образом, в результате наших преобразований сохранилось неизменным только ОЗ 3, а зеркала 1 и 2 заменили на 1' и 2'. Из рис. 26 видно, что эти зеркала представляют собой зеркала 1 и 2, повернутые на угол  $\mu$  вокруг оси ОУ по часовой стрелке. Угол поворота этих зеркал определяется требованием, чтобы орт нормали  $\vec{n}_1$  повернутого зеркала 1 совпал с ребром  $\vec{e}_3$ , образованным зеркалами 2' и 3, только тогда это будет инвариантным направлением. Следует отметить, что в рассмотренных аналитических преобразованиях потребовались длительные вычисления, в то время как при данном методе то же достигнуто простыми заменами эквивалентных зеркальных систем. Кроме того, примененный здесь метод позволяет правильно выбирать соответствующие юстировочные базы.

#### 4. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ПРОСТРАНСТВА ЗЕРКАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ

Рассмотрим действие элементарных ЗС при параллельном их перемещении.

**Одиночное зеркало.** К радиус-вектору  $\vec{r}_0$  точки  $M_0$ , фиксированной на поверхности зеркала 1 при его перемещении на отрезок  $ns$ , прибавляется вектор  $\vec{s}$ , определяющий некоторую точку  $M_0$  на поверхности зеркала 1'. Эту точку характеризует радиус-вектор  $\vec{r}_0$  (рис. 27). В соответствии со вторым членом в формуле (59) сдвиг изображения точки ОЗ

$$q = 2\vec{n}(\vec{r}_0\vec{n}).$$

Для получения  $\vec{q}$  — измененного значения вектора  $\vec{q}$  — необходимо  $\vec{r}_0$  заменить вектором  $\vec{r}_0 = \vec{r}_0 + \vec{s}$ :

$$\vec{q} = 2\vec{n}(\vec{n}(\vec{r}_0 + \vec{s})) \quad (104)$$

или

$$\vec{q} = \vec{q} + 2\vec{n}(\vec{n}\vec{s}). \quad (105)$$

Отсюда сдвиг изображения  $\vec{M'M'}$ , определяемый радиус-вектором  $\vec{r'}$ ,

$$\vec{M'M'} = \vec{q} - \vec{q} = 2\vec{n}(\vec{n}\vec{s}).$$

Заметим, что  $\vec{n}\vec{s} = \vec{s} \cos(\vec{n}\vec{s})$  — проекция вектора  $|\vec{s}|$  на нормаль к зеркалу. В матричной форме (104) и (105) имеют вид

$$\vec{Q} = Q + 2NN^*S = 2NN^*(R_0 + S), \quad (106)$$

где  $\vec{S}$  — одностолбцовая матрица из координат вектора перемещения  $\vec{s}$ .

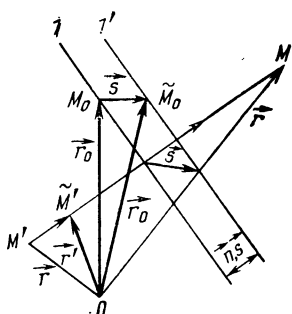


Рис. 27. Действие сдвига одиночного зеркала

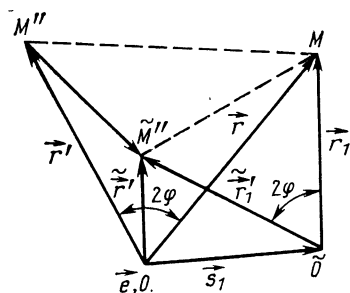


Рис. 28. Действие сдвига углового зеркала

Из (106) видно, что сдвиг изображения происходит по нормали к зеркалу на двойное абсолютное значение проекции перемещения на нормаль (в направлении нормали, если проекция положительна, и в направлении, противоположном нормали, если проекция отрицательна). Перемещение зеркала в направлении, лежащем в его плоскости, естественно, не влияет на положение изображения.

Таким образом, замечательным свойством ОЗ является то, что направление сдвига изображения не зависит от направления смещения ОЗ и всегда происходит вдоль его нормали, при этом сдвиг равен двойному значению смещения ОЗ.

**Зеркальный ромб.** Для зеркального ромба

$$Q = 2bN_1,$$

т. е. при неизменной  $N_1$  сдвиг зависит только от расстояния  $b$  между зеркалами. При параллельном переносе ЗР на вектор  $s$  получим опять

$$\tilde{Q} = 2bN_1 = Q.$$

Таким образом, параллельный перенос ЗР не изменяет положения изображения точки.

**Угловое зеркало.** Если выбрать для обоих зеркал такую общую фиксированную точку  $M_0$  (т. е. на ребре УЗ), что  $R_{01} = R_{02} = R_0$ , то будем иметь [4]

$$Q = (T_{OZ_2} 2N_1 N_1^* + 2N_2 N_2^*) R_0 = (E - T_{Y3}) R_0.$$

При параллельном переносе УЗ на вектор  $\vec{s}$  получим

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= (T_{OZ_2} 2N_1 N_1^* + 2N_2 N_2^*) (R_0 + S) = \\ &= Q + (T_{OZ_2} 2N_1 N_1^* + 2N_2 N_2^*) S. \end{aligned}$$

Сдвигу изображения соответствует однострочная матрица

$$\tilde{Q} - Q = (T_{OZ_2} 2N_1 N_1^* + 2N_2 N_2^*) S, \quad (107)$$

вычисляемая по той же формуле, что и  $Q$ , только с матрицей  $S$

вместо  $R_0$ . Входящие в эту формулу произведения  $N_1^* S = \vec{n}_1 \vec{s}$  и  $N_2^* S = \vec{n}_2 \vec{s}$  показывают, что важна только проекция вектора  $\vec{s}$  на плоскость, перпендикулярную ребру УЗ (и содержащая орты нормалей  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$ ). Составляющую вектора  $\vec{s}$ , лежащую в этой плоскости, обозначим  $\vec{s}_1$  и рассмотрим сечение углового зеркала плоскостью, перпендикулярной его ребру (рис. 28). Начало координат  $O$  возьмем в точке пересечения этой плоскости с ребром (на рисунке УЗ не изображено). Изображение  $M'$  — радиус-вектор  $\vec{r}'$  точки  $M$  получим, повернув ее радиус-вектор  $\vec{r}$  на угол  $2\varphi$  вокруг точки  $O$ . Матрица  $T_{УЗ}$  в данном случае — матрица поворота на угол  $2\varphi$  вокруг ребра зеркала, а  $Q=0$  (одностолбцовый нуль-матрице). Итак, из формулы (67) имеем

$$R'' = T_{УЗ} R. \quad (108)$$

УЗ вместе с началом координат (след ребра  $O$ ) смещается на  $\vec{s}_1$ , и новый след ребра  $\widetilde{O}$  возьмем за начало вспомогательной системы координат. В вспомогательной системе координат точка  $M$  имеет радиус-вектор  $\vec{r}_1$  и соответствующую ему одностолбцовую матрицу  $R_1$ ; изображение точки  $M$  теперь будет  $M''$  с радиус-вектором в вспомогательных координатах  $\vec{r}_1'$  и соответствующей ему матрицей  $\widetilde{R}_1'$ . При этом

$$\widetilde{R}_1' = T_{УЗ} R_1. \quad (109)$$

По известным формулам, связывающим основные и вспомогательные координаты, имеем

$$R = R_1 + S_1; \quad (110)$$

$$\widetilde{R}' = \widetilde{R}_1' + S_1, \quad (111)$$

где  $S_1$  — одностолбцовая матрица из координат вектора  $\vec{s}_1$ . Подставляя  $R_1$  из (110) и  $\widetilde{R}_1'$  из (111) в (109), получим

$$\widetilde{R}' = T_{УЗ} R - T_{УЗ} S_1 + S_1.$$

Вычитая из обеих частей этого равенства соответствующие части равенства (108), окончательно найдем выражение для одностолбцовой матрицы, соответствующей перемещению изображения:

$$R' - R'' = S_1 - T_{УЗ} S_1. \quad (112a)$$

В векторно-матричной форме

$$\overrightarrow{M'' M''} = S_1 - T_{УЗ} S_1 = (E - T_{УЗ}) S_1, \quad (112b)$$

где  $T_{УЗ}$  — оператор поворота свободного вектора на угол  $2\varphi$  вокруг оси, перпендикулярной к рассматриваемой плоскости.

Итак, для того чтобы получить вектор перемещения изображения, необходимо от вектора  $\vec{s}_1$  перемещения УЗ в плоскости, перпендикулярной к ребру, отнять вектор, получаемый поворотом этого вектора на двойной угловой базис УЗ.

При сдвиге УЗ действует так: в начальном положении ребро УЗ совмещено с точкой  $M$  (рис. 29); далее оно смещается на вектор  $\vec{s}$ , тогда изображение точки переходит в  $M'$ . Из равнобедренного треугольника  $AMM'$  получим ту же формулу

$$\vec{MM'} = \vec{S} - \vec{M'A} = S - T_{УЗ}S = (E - T_{УЗ})S.$$

Причем из того же треугольника

$$MM' = 2S \sin \varphi, \quad (113)$$

а направление сдвига составляет угол  $\pi/2 - \varphi$  с направлением  $\vec{s}$  смещения УЗ, отложенного от  $\vec{s}$  в сторону, противоположную повороту пространства УЗ.

Формула (113) также показывает, что сдвиги изображения точки  $M$  УЗ не зависят от относительного расположения точки и УЗ и определяются лишь вектором  $\vec{s}$ , перпендикулярным к ребру УЗ.

## 5. ЗЕРКАЛЬНАЯ СИСТЕМА, СОСТОЯЩАЯ ИЗ ЗЕРКАЛЬНОГО РОМБА И ОДИНОЧНОГО ЗЕРКАЛА

Важным в цепи расчетов ЗС является вопрос о возможности перестановки последовательности расположения по ходу лучей отдельных элементарных ЗС, составляющих более сложную систему, без изменения характера и воздействия на общий ход лучей в системе.

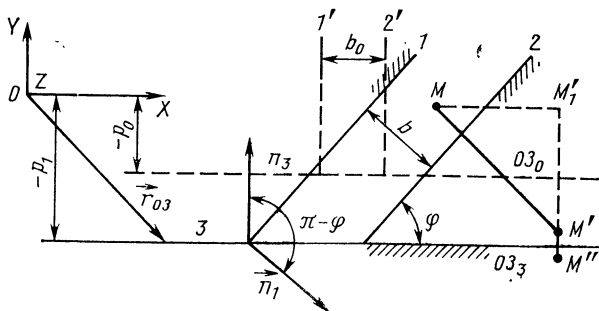


Рис. 30. Действие трехзеркальной системы с компланарными нормальями:

1 и 2 — зеркала до поворота; 1' и 2' — зеркала после поворота

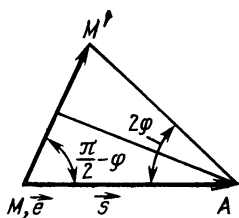


Рис. 29. Геометрическая интерпретация сдвига изображения точки при сдвиге углового зеркала



Прежде всего отметим, что ЗС инвариантного вида инварианта к последовательности хода лучей через элементарные ЗС, ее составляющие. Это вытекает из того, что ЗС, представленные в инвариантном виде, например из двух элементарных ЗС (ЗР с базисом  $b_0$  и  $OЗ_3$ ) (рис. 30), действуют в плоскостях, являющихся инвариантными одна для другой. Большой интерес представляет нахождение формул для перестановок элементарных ЗС без приведения общей ЗС к инвариантному виду. Следует рассматривать переставимость элементарных ЗС отдельно по вызываемому ими сдвигу и повороту пространства. По сдвигу могут переставляться тройные зеркала ОЗ и ЗР (любые три зеркала с компланарными нормальными) и четверные УЗ и ЗР. Тройные зеркала ОЗ и УЗ не могут инвариантно компенсировать сдвигов одной ЗС другой, так как у них имеются составляющие в разных направлениях, а изменять угловой базис УЗ нельзя из-за иного преобразования пространства — иного его поворота. Таким образом, переставимы (по сдвигу пространства) только две сложные ЗС: тройные зеркала ОЗ и ЗР и четверные УЗ и ЗР. Что касается ЗС из двух ЗР, то они переставимы без всяких дополнительных условий.

Два УЗ с пересекающимися ребрами переставимы по повороту, причем первое УЗ при этом должно быть повернуто вокруг ребра второго УЗ на угол поворота им пространства (см. п. 1 гл. 4) или второе УЗ вокруг ребра первого на угол поворота пространства этим зеркалом, но с обратным знаком. Приведение к инвариантному виду двух УЗ со скрещивающимися ребрами показано в п. 1 гл. 4.

Для удобства рассмотрим действие трехзеркальной системы  $ЗР \rightarrow ОЗ$  или  $ОЗ \rightarrow ЗР$  в плоскости расположения нормалей зеркал (задача плоская). Угол между ортами нормалей  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_3$  обозначим  $\pi - \varphi$ , он отсчитывается против часовой стрелки. Начало координат выберем произвольно на расстоянии  $\rho_1 = \vec{r}_{ОЗ} \vec{n}_3$  от зеркала 3, базис ромба —  $b$  (см. рис. 30).

Введем одностолбцовые матрицы  $R, R', R''$  из координат точек  $M, M', M''$  и  $N_1, N_2, N_3$  из координат ортов  $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$  соответственно. Радиус-вектор  $\vec{r}_{ОЗ}$  характеризуется матрицей  $R_{ОЗ}$  из координат точки, произвольно выбранной на зеркале  $ОЗ_3$ .

Для отражения в ЗР имеем

$$R' = T_{ЗР}R + Q_{ЗР} = R + Q_{ЗР},$$

где  $Q_{ЗР} = 2bN_1$  — матрица сдвига изображения точки.

Последовательность отражений  $ЗР \rightarrow ОЗ$ . Рассмотрим различные варианты относительного расположения ТЗ:

$$\begin{aligned} R'' &= T_{ОЗ}R' + Q_{ОЗ} = T_{ОЗ}(R + Q_{ЗР}) + Q_{ОЗ} = \\ &= T_{ОЗ}(R + 2bN_1) + 2N_3N_3^*R_{ОЗ} = T_{ОЗ}R + T_{ОЗ}2bN_1 + 2N_3N_3^*R_{ОЗ}. \end{aligned} \quad (114)$$

Два последних члена дают сдвиг пространства  $Q_{ЗР \rightarrow ОЗ}$ , который можно представить следующим образом:

$$Q_{ЗР \rightarrow ОЗ} = (E - 2N_3N_3^*)2bN_1 + 2N_3N_3^*R_{ОЗ} = 2N_3N_3^*R_{ОЗ} +$$

$$+ 2b(N_1 - 2N_3 N_3^* N_1) = 2N_3 N_3^* R_{O3} + 2b(N_1 + 2N_3 \cos \varphi). \quad (115a)$$

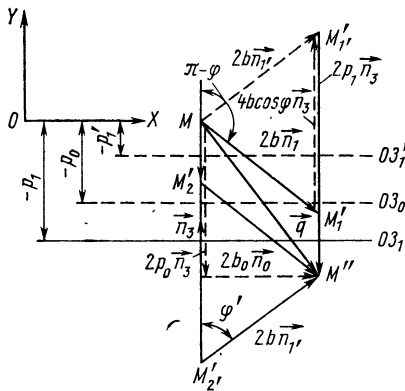
В векторном виде

$$\vec{Q}_{3P \rightarrow O3} = \vec{q} = -2\vec{n}_3 p_1 + 2b(\vec{n}_1 + 2\vec{n}_3 \cos \varphi). \quad (115b)$$

Как видно из последнего выражения (рис. 31), сдвиг  $\vec{q}$  не зависит от положения изображаемой точки  $M$  и зависит в основном от внутренних параметров тройного зеркала: угла,  $\varphi$  между зеркалами и базиса  $b$  ЗР. Из внешних параметров в  $\vec{q}$  входят: ориентация ортов  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_3$  зеркал и  $p_1$  — расстояние ОЗ от начала произвольно выбранной системы координат.

Выясним, имеется ли еще одно взаимное расположение ЗР и ОЗ для той же последовательности ЗР  $\rightarrow$  ОЗ, при которой неизменными являются  $\vec{n}_3$  и  $\vec{q}$ , а переменными  $\vec{n}_1$  (угол  $\varphi$ ) и  $p_1$ . Произведем в (115b) замену  $\vec{n}_1$  на  $\vec{n}_3$ ,  $\varphi$  на  $\varphi'$  и  $p_1$  на  $p_1'$ , получим

$$\vec{q} = 2\vec{n}_3 p_1' + 2b(\vec{n}_1' + 2\vec{n}_3 \cos \varphi'). \quad (116)$$



При повороте ЗР соответствующим сдвигом ОЗ можно компенсировать только составляющую, перпендикулярную к нему. Составляющая в плоскости самого ОЗ должна остаться неизменной, а это может быть только в одном случае, когда угол  $\varphi' = \pi - (\pi - \varphi) = \varphi$ , поэтому из (115b) и (116) получим

$$\begin{aligned} \vec{n}_3 p_1 - \vec{n}_3 p_1' &= -b\vec{n}_1 + b\vec{n}_1' + \\ &+ 4b\vec{n}_3 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (117)$$

Рис. 31. Четыре различных варианта расположения трехзеркальной системы при перестановке последовательности падения лучей на ЗР и ОЗ

Из треугольника

$MM_1'M_1'$ , при условии  $\varphi' = \varphi$  (см. рис. 31) следует, что

$$\vec{n}_1' = \vec{n}_1 + 2 \cos \varphi \vec{n}_3. \quad (118)$$

Умножив обе части равенства (118) скалярно на  $\vec{n}_1$ , найдем угол  $\varphi''$  между  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_1'$ :

$$\begin{aligned} \cos \varphi'' = \vec{n}_1 \vec{n}_1' &= \vec{n}_1 \vec{n}_1 + 2 \cos \varphi \vec{n}_1 \vec{n}_3 = 1 - 2 \cos^2 \varphi = \\ &= -\cos 2\varphi = \cos (\pi - 2\varphi). \end{aligned}$$

Следовательно,  $\varphi'' = \pi - 2\varphi$ . Учитывая (117) и (118), получаем

$$\rho'_1 - \rho_1 = 2b \cos \varphi. \quad (119)$$

Следовательно, повернув ЗР в плоскости (рис. 31) на угол  $\pi - 2\varphi$  против часовой стрелки и сместив ОЗ в сторону СК на величину  $2b \cos \varphi$ , получим тройное зеркало, полностью эквивалентное по действию исходному тройному зеркалу. Из рис. 31 также видно, что поворотом на угол  $\pi$  вокруг средней точки вектора  $\vec{q}$  треугольники  $MM'_1, M''$  и  $MM'_1, M''$  совмещаются с треугольниками  $MM'_2, M''$  и  $MM'_2, M''$  соответственно.

Такое отображение соответствует другой последовательности отражений:  $OZ \rightarrow 3P$ , к рассмотрению которой и переходим.

**Последовательность отражений  $OZ \rightarrow 3P$ .** Первоначально найдем выражение матрицы радиус-вектора точки  $M''$  для случая, соответствующего треугольнику  $MM'_2, M''$ . Радиус-вектор выражает действие системы при сдвинутом ОЗ в положении  $OZ'_1(\rho'_1)$ . Первое отражение лучей от ОЗ описывается матрицей

$$R' = T_{OZ}R + Q_{OZ},$$

затем от ЗР

$$R'' = R' + Q_{3P} = T_{OZ}R + Q_{OZ} + Q_{3P}. \quad (120)$$

Полагая в (120)  $Q_{OZ} = 2N_3N_3^*R'$ , что соответствует перемещению  $OZ_1$  в положение  $OZ'_1$ , получаем

$$R'' = (E - 2N_3N_3^*)R + 2N_3N_3^*R' + 2bN_1 = T_{OZ}R + Q_{OZ \rightarrow 3P}, \quad (121)$$

где  $Q_{OZ \rightarrow 3P} = 2N_3N_3^*R' + 2bN_1$  — матрица сдвига изображения всей системой, соответствующая вектору сдвига  $\vec{q}$ , который найдем, перейдя от матричного выражения (121) для  $Q$  к векторному:

$$\vec{q} = -2\rho'_1 \vec{n}_3 + 2b\vec{n}_1, \quad (122)$$

что соответствует треугольнику  $MM'_2, M''$ .

Во втором случае последовательность  $OZ \rightarrow 3P$  соответствует треугольнику  $MM'_2, M''$  (см. рис. 31), что выражает второе действие системы при ОЗ в положении  $OZ_1(\rho_1)$ , когда орт нормали ЗР  $\vec{n}_1$  переходит в  $\vec{n}_1'$ , т. е. составляет с  $\vec{n}_3$  угол  $\varphi' = \varphi$ .

С учетом сказанного матрица  $R''$  из (121) имеет вид

$$\begin{aligned} R'' &= (E - 2N_3N_3^*)R + 2N_3N_3^*R' + 2bN_1 = \\ &= T_{OZ}R + Q_{OZ \rightarrow 3P}, \end{aligned} \quad (123)$$

где  $Q_{OZ \rightarrow 3P} = 2N_3N_3^*R' + 2bN_1$ ;  $N_1$  — матрица, соответствующая орту  $\vec{n}_1'$ .

В векторном виде вектор  $\vec{q}$ , соответствующий  $Q_{3P \rightarrow O3}$ , записывается

$$\vec{q} = -2p_1\vec{n}_3 + 2b\vec{n}_1. \quad (124)$$

Анализ выражений (1156), (116), (122) и (124) приводит к следующему выводу: сдвиг пространства зеркальным ромбом не зависит от положения исходной точки, а сдвиг пространства одиночным зеркалом зависит от положения точки, поэтому при последовательности отражений  $3P \rightarrow O3$  в формулах для  $\vec{q}$  (1156) и (116) по сравнению с формулами (122) и (124) имеется дополнительный член  $4b\vec{n}_3 \cos \varphi$ . Если же имеется последовательность  $O3 \rightarrow 3P$ , то сдвиг точки зеркальным ребром не влияет на действие  $O3$ .

Кроме того, из рассмотрения указанных формул и рис. 31 следует, что для изменения последовательности расположения  $3P$  и  $O3$  по ходу лучей ( $3P \rightarrow O3$  или  $O3 \rightarrow 3P$ ) и сохранения общего хода лучей неизменным можно поступить двояко: либо повернуть  $3P$  на угол  $\pi - 2\varphi$  (где  $\varphi$  — угол между  $O3$  и  $3P$ ), чтобы дополнительный сдвиг изображения происходил по направлению, коллинеарному  $\vec{n}_3$ , либо сдвинуть  $O3$  на величину  $p_1 - p_1 = 2b \cos \varphi$ . Таким образом, система из трех зеркал с компланарными нормальными, содержащая  $3P$  определенного базиса и  $O3$ , может быть расположена по четырем указанным выше вариантам без изменения влияния ее действия на общий ход лучей в системе.

## 6. ОТЫСКАНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ (ИНВARIANTНОЙ) ТРЕХЗЕРКАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ИЗМЕНЕННЫМ БАЗИСОМ ЗЕРКАЛЬНОГО РОМБА

Как известно, эквивалентной называется система того же действия на ход лучей, что и данная, но с иными внутренними или внешними параметрами.

Обозначим новые значения параметров: одиночного зеркала  $p_0$  зеркального ромба  $b_0$  и  $\vec{n}_0$  (см. рис. 30 и 31). Для определения относительного положения  $3P$  и  $O3$  в эквивалентной ЗС приравняем (1156) к (124), заменив  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$  на  $\vec{n}_0$ :

$$-2p_1\vec{n}_3 + 2b\vec{n}_0 + 4b \cos \varphi_0 \vec{n}_3 = -2p_1\vec{n}_3 + 2b\vec{n}_0.$$

Отсюда  $4b \cos \varphi_0 = 0$ , а следовательно,  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$  и  $\vec{n}_0$  перпендикулярно

$\vec{n}_3$ . Для определения величин параметров эквивалентности ЗС заменим в последнем выражении в левой части  $p_1$  на  $p_0$  и  $b$  на  $b_0$ :

$$-2p_0\vec{n}_3 + 2b_0\vec{n}_0 = -2p_1\vec{n}_3 + 2b\vec{n}_1$$

или

$$b_0\vec{n}_0 - b\vec{n}_1 = \vec{n}_3 (p_0 - p_1). \quad (125)$$

Умножим обе части выражения скалярно вначале на  $\vec{n}_0$ , а затем

на  $\vec{n}_3$ . После преобразований получим новые параметры инвариантной трехзеркальной системы:

$$b_0 = b \sin \varphi; \quad (126)$$

$$p_0 = p_1 - b \cos \varphi. \quad (127)$$

На основании полученных выражений можно сделать вывод, что эквивалентная инвариантная ЗПС может быть представлена в виде ОЗ, сдвинутого в сторону положительного направления орта нормали ОЗ на величину  $b \cos \varphi$ , и перпендикулярного ему ЗР с измененным базисом  $b = b \sin \varphi$  и нормалью  $\vec{n}_0$  (перпендикулярной  $\vec{n}_3$ ), показанных на рис. 30 штриховой линией.

Полученная эквивалентная система дает возможность просто установить свойства более сложной соответствующей ей системы. При вращении системы вокруг осей, параллельных  $\vec{n}_0$  или  $\vec{n}_3$ , в действии ее участвует в первом случае лишь ОЗ в положении  $\vec{p}_0$ , во втором — эквивалентный ЗР с базисом  $b_0$  и ортом нормали  $\vec{n}_0$ .

Представление любой ЗС в виде ее эквивалентного (инвариантного) прототипа позволяет наиболее правильно расставлять допуски на ее изготовление, просто находить траектории движения изображения точки при ее перемещении и облегчает синтезирование ЗС.

## 7. ЗЕРКАЛЬНАЯ СИСТЕМА, СОСТОЯЩАЯ ИЗ УГЛОВОГО И ОДИНОЧНОГО ЗЕРКАЛ (С КОМПЛАНАРНЫМИ НОРМАЛЯМИ)

В наиболее общем случае трехзеркальная система с компланарными нормалью состоит из двух элементарных систем — УЗ и ОЗ в той или другой последовательности их расположения (рис. 32): УЗ (зеркала 1 и 2) и ОЗ (зеркало 3) или ОЗ (зеркало 1) и УЗ (зеркала 2 и 3). Преобразуем эту систему к системе, состоящей из ОЗ и ЗР. Используя инвариантность УЗ к его ребру, повернем  $\vec{e}_{2,3}$  вокруг ребра  $\vec{e}_{2,3}$  до параллельности зеркалу 2 зеркалу 1 (рис. 32,а);

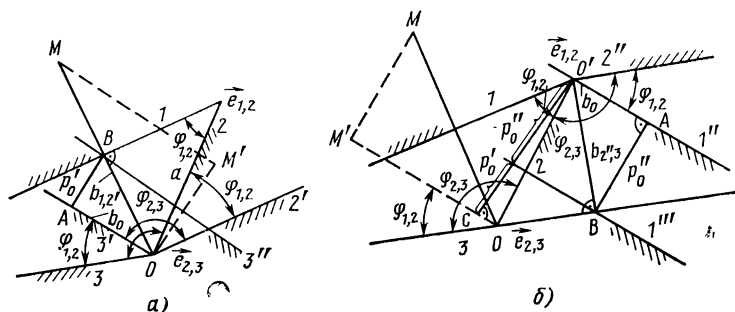


Рис. 32. Приведение трехзеркальной системы с компланарными нормалью к эквивалентному виду:

а — поворачивается  $\vec{e}_{2,3}$ , состоящее из зеркал 2 и 3; б — поворачивается  $\vec{e}_{1,2}$ , состоящее из зеркал 1 и 2

в этом случае  $\vec{n}_2' = -\vec{n}_1$ . Тогда получим ЗР, состоящий из зеркал  $1$  и  $2'$ , и ОЗ — из зеркала  $3'$ . Причем базис  $b_{1,2}$  ЗР равен расстоянию от ребра  $e_{2,3}$  до ОЗ зеркала  $1$ , а орт нормали  $\vec{n}_3$  вместе с зеркалом  $3$  повернется на угол  $\varphi_{1,2}$  относительно начального положения и займет положение  $\vec{n}_3'$ .

Если поворот будет осуществляться вокруг ребра  $e_{1,2}$ , то в УЗ войдут зеркала  $1$  и  $2$ , которые должны повернуться на угол  $\varphi_{2,3}$ . При этом зеркало  $1$  займет положение  $1''$ , параллельное зеркалу  $3$ , в данном случае неподвижному. Базис полученного ЗР  $b_{2,3}$  будет равен расстоянию от ребра  $e_{1,2}$  до третьего зеркала (рис. 32,б).

Для обеих полученных систем, хотя они и имеют различные базисы, ЗР, ОЗ параллельны и сдвинуты одно относительно другого, поэтому ЗС являются эквивалентными, что и доказывается ниже.

1. После поворота УЗ<sub>2,3</sub> вокруг ребра  $e_{2,3}$  по часовой стрелке на угол  $\varphi_{1,2}$  зеркала  $2$  и  $3$  займут положения  $2'$  и  $3'$  (см. рис. 32,а). При этом зеркало  $2'$  будет параллельно зеркалу  $1$ , и мы получим ЗР с линейным базисом  $OB = b_{1,2}'$  и ОЗ<sub>3</sub>. Следовательно, ЗПС приведет к системе ЗР<sub>1,2</sub> → ОЗ<sub>3</sub>. Выберем для простоты точку  $M$  в таком положении (от этого строгость доказательства не пострадает) относительно ЗПС, чтобы ее изображение через ЗР<sub>1,2</sub> совпало с точкой  $O$ , лежащей в плоскости зеркала  $3'$ , которое в данном случае не окажет воздействия на сдвиг этой точки. Теперь повернем ЗР<sub>1,2</sub> так, чтобы орты его нормалей были коллинеарны плоскости зеркала  $3'$ , а сами зеркала перпендикулярны этому зеркалу. Тогда ЗР<sub>1,2</sub> с базисом  $b_{1,2}'$  может быть заменен другим ЗР с базисом  $AO$ , а ОЗ должно быть передвинуто на отрезок  $AB$  в положение ОЗ<sub>3''</sub>, и мы придем к системе инвариантного вида.

Причем последовательность отражений сохранится прежней ЗР → ОЗ. Теперь новый ЗР, перпендикулярный к ОЗ<sub>3</sub>, сдвинет точку  $M$  в положение  $M'$ , и для того чтобы она по-прежнему после воздействия ОЗ изобразилась в точке  $O$ , ОЗ<sub>3</sub> должно быть сдвинуто на расстояние  $AB$  по направлению его нормали — в положение ОЗ<sub>3''</sub>. Если обозначить расстояние между ребрами УЗ  $e_{1,2}$  и  $e_{2,3}$  через  $a$ , то для базиса ЗР<sub>1,2</sub> получим выражение

$$b_{1,2}' = a \sin \varphi_{1,2}. \quad (128)$$

Базис эквивалентного ЗР и сдвиг ОЗ из построений рис. 32,а с учетом (126) соответственно

$$b_0 = AO = b_{1,2}' \cos (\varphi_{2,3} - \pi/2) = a \sin \varphi_{1,2} \sin \varphi_{2,3}; \quad (129)$$

$$p_0' = AB = b_{1,2}' \sin (\varphi_{2,3} - \pi/2) = -a \sin \varphi_{1,2} \cos \varphi_{2,3}. \quad (130)$$

Перейдем теперь ко второму варианту решения данной задачи.

2. После поворота УЗ<sub>1,2</sub> вокруг ребра  $e_{1,2}$  (см. рис. 32,б) на угол  $\varphi_{2,3}$  по часовой стрелке зеркала  $2''$  и  $3$  образуют ЗР<sub>2'',3</sub>, а зеркало  $1$  займет положение  $1''$ . Здесь последовательность отражений ОЗ<sub>1''</sub> → ЗР<sub>2'',3</sub> иная, чем в первом случае, где вначале бы-

ло отражение от ЗР, а затем от ОЗ. В этом варианте получено  $ОЗ_1''$  и  $ЗР_{2'',3}$ . Из рис. 32,б базис последнего

$$b_{2'',3} = a \sin(\pi - \varphi_{2,3}) = a \sin \varphi_{2,3}. \quad (131)$$

Найдем базис  $b_0 = O'A$  в плоскости зеркала  $1''$  для требуемого сдвига  $ОЗ_1''$  на величину  $AB = p_0$ . Из рис. 32,б с учетом равенства (126)

$$b_0 = b_{2'',3} \cos(\pi/2 - \varphi_{1,2}) = a \sin \varphi_{2,3} \sin \varphi_{1,2}; \quad (132)$$

$$p_0'' = b_{2'',3} \sin(\pi/2 - \varphi_{1,2}) = a \sin \varphi_{2,3} \cos \varphi_{1,2}.$$

Таким образом, получено то же значение базиса  $b_0$  эквивалентного ЗР. Осталось доказать, что сдвиги  $p_0'$  для  $ОЗ_3'$  и  $p_0''$  для  $ОЗ_1''$  совмещают эти зеркала. Из треугольника  $CO'O$  с углом при вершине  $O$ , равным  $\varphi_{2,3} - \varphi_{1,2}$  (см. рис. 32,б), получим

$$p_0' + p_0'' = a \sin(\varphi_{2,3} - \varphi_{1,2}) = a (\sin \varphi_{2,3} \cos \varphi_{1,2} - \cos \varphi_{2,3} \sin \varphi_{1,2}),$$

что с учетом выражений (130) и (132) и доказывает правильность решения задачи.

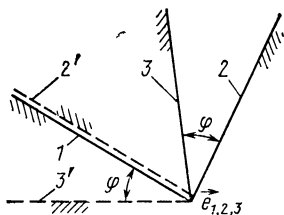


Рис. 33. Замена тройного зеркала с общей линией пересечения одним зеркалом

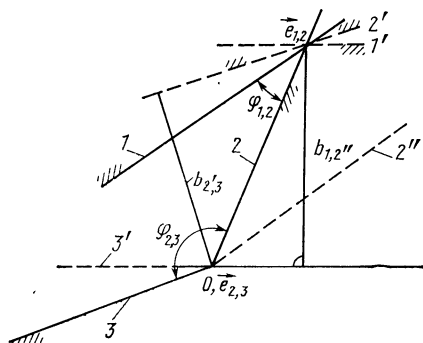


Рис. 34. Определение связей между углами  $\varphi_{1,2}$  и  $\varphi_{2,3}$  и базисами  $b_{1,2}$  и  $b_{2',3}$

Необходимо отметить, что в частном случае возможно пересечение зеркал с компланарными нормальными  $1, 2, 3$  по одной прямой  $\vec{e}_{1,2,3}$  (рис. 33). В такой системе для нахождения эквивалентной ЗС также используется инвариантность УЗ к его ребру: вращаем  $УЗ_{2,3}$  вокруг  $\vec{e}_{1,2,3}$  до совмещения  $ОЗ_2'$  с  $ОЗ_1$ , при этом действие их взаимно исключается, следовательно, действие системы сводится к действию эквивалентного зеркала  $3'$ .

## 8. МЕТОДИКА ЗАМЕНЫ ЗЕРКАЛЬНЫХ СИСТЕМ ИЗ НЕЧЕТНОГО ЧИСЛА ОТРАЖАЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С КОМПЛАНАРНЫМИ НОРМАЛЯМИ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ СИСТЕМОЙ

При наличии в ЗС нечетного числа зеркал, нормали которых компланарны (призмы Шмидта, Аббе, Пехана и др.), система путем последовательных преобразований, как это показано в п. 7 гл. 3 для тройных зеркал, приводится к эквивалентной ЗС, состоящей из ЗР и ОЗ. Причем последовательность по ходу лучей расположения ЗР и ОЗ может быть  $\text{ЗР} \rightarrow \text{ОЗ}$  или  $\text{ОЗ} \rightarrow \text{ЗР}$ . Эта задача решается следующим образом: вначале ЗС путем поворота УЗ приводится к эквивалентной системе, состоящей из ЗР и ОЗ, а затем находится ее инвариантный вид.

**Пример 1. Решение задачи для системы с тремя отражающими поверхностями** (рис. 34). Приведем ЗС к эквивалентной системе, содержащей ОЗ и ЗР. При повороте зеркал 1 и 2 вокруг ребра  $\vec{e}_{1,2}$  на угол  $\varphi_{2,3}$  определяется базис  $b_{2',3}$  ЗР<sub>1</sub> как расстояние от ребра  $\vec{e}_{2,3}$  до ОЗ<sub>2'</sub>; система имеет последовательность  $\text{ОЗ} \rightarrow \text{ЗР}$ . При повороте зеркал 2 и 3 вокруг ребра  $\vec{e}_{2,3}$  на угол  $\varphi_{1,2}$  определяются базис  $b_{1,2'}$  ЗР<sub>2</sub> как расстояние от ребра  $\vec{e}_{1,2}$  до ОЗ<sub>3'</sub>; система имеет последовательность  $\text{ЗР} \rightarrow \text{ОЗ}$ . Положение ОЗ<sub>1'</sub> определяется зеркалом 1, повернутым на угол  $\varphi_{2,3}$  вокруг  $\vec{e}_{1,2}$ . Положение ОЗ<sub>3'</sub> определяется зеркалом 3, повернутым на угол  $\varphi_{1,2}$  вокруг  $\vec{e}_{2,3}$  (зеркала 1' и 3' параллельны).

Приведем систему, состоящую из ОЗ и ЗР, к каноническому виду, при котором ЗР устанавливается перпендикулярно к ОЗ. По формуле (129) определяют новый базис  $b_0$  ЗР. Затем находят параметр  $p_0$  — расстояние от ребра  $\vec{e}_{1,2}$  до плоскости эквивалентного зеркала 1''' по формуле (132) или параметр  $p_0'$  — расстояние от ребра  $\vec{e}_{2,3}$  до плоскости зеркала 3''' по формуле (130).

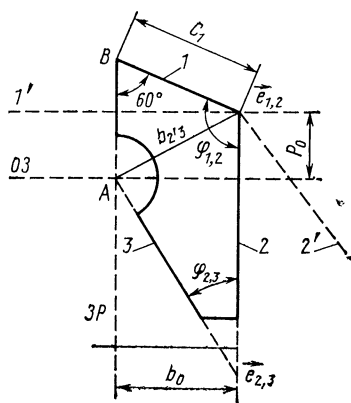
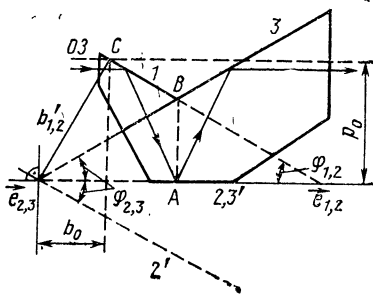


Рис. 35. Преобразование призмы Лемана

Рис. 36. Преобразование призмы Аббе





**Пример 2.** Решение задачи для системы с произвольным нечетным числом отражающих поверхностей. Первоначально рассматриваются три последние отражающие поверхности и приводятся к эквивалентной ЗС из  $OZ_1$  и  $ZP_1$ , затем две предыдущие поверхности и полученное  $OZ_1$ , которые также приводятся к эквивалентной системе  $OZ_2$  и  $ZP_2$ , и т. д. Все полученные ЗР приводятся к одному ЗР с базисом, равным геометрической сумме входящих базисов.

**Пример 3.** Приведение призмы Лемана ( $ВЛ = 0^\circ$ ) к эквивалентному виду. Выделим  $UZ_{1,2}$  с ребром  $e_{1,2}$  (углы между отражающими поверхностями  $\varphi_{1,2} = 120^\circ$ ) и  $OZ_3$  ( $\varphi_{2,3} = 30^\circ$ ) (рис. 35). Обозначение зеркал принято аналогично рис. 32.

Порядок приведения призмы к эквивалентному виду следующий.

1. После поворота  $UZ_{1,2}$  вокруг ребра  $e_{1,2}$  на угол  $30^\circ$  определяем  $b_{2,3}$  — расстояние от  $e_{1,2}$  до  $OZ_3$ . Из треугольника  $ABe_{1,2}$  находим  $b_{2,3} = Ae_{1,2} = Be_{1,2} = C_1$ , так как все углы треугольника равны  $60^\circ$ . Последовательность отражений  $ZP \rightarrow OZ$ .

2. Строим положение  $OZ_1'$ , повернутое на угол  $\varphi_{2,3} = 30^\circ$  вокруг  $e_{1,2}$ .

3. Определяем базис эквивалентного ЗР

$$b_0 = b_{2,3} \cdot \sin(\pi - \varphi_{1,2}) = C_1 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} C_1.$$

4. Находим  $p_0 = -b_{2,3} \cdot \cos(\pi - \varphi_{1,2}) = -C_1 \cos 60^\circ = -0,5C_1$ .

Таким образом, получаем эквивалентную ЗС инвариантного вида; это  $OZ$ , смещенное на  $-0,5C_1$  в сторону его нормали, и перпендикулярный к нему ЗР с базисом  $b_0 = 0,85C_1$  (см. рис. 35). С учетом сдвига изображения точки, вносимого плоскопараллельной пластинкой, к которой приводится призма, базис эквивалентного ЗР

$$b_{03} = b_0 - \frac{n-1}{2n} d,$$

где (и далее)  $d$  — геометрическая длина хода луча в призме;  $n$  — показатель преломления стекла призмы.

**Пример 4.** Приведение призмы Аббе (рис. 36) к эквивалентному виду [12]. Систему из трех отражающих поверхностей призмы составляют  $OZ_1$  и  $UZ_{2,3}$ .

Порядок приведения призмы к эквивалентному виду следующий.

1. Преобразование зеркальной системы: строим положение  $UZ_{2,3}$ , повернутое на угловой базис  $\varphi_{1,2} = 30^\circ$ ,  $UZ_{1,2}$ , вокруг ребра  $e_{2,3}$ . Получаем  $ZP_{1,2'}$  и  $OZ_3$ .

2. В преобразованной системе определяем  $b_{1,2'}$  (базис ромба  $ZP_{1,2'}$ ) как расстояние от ребра  $e_{2,3}$  до  $OZ_1$ . Из равенства треугольников  $e_{2,3}BC$  и  $e_{2,3}AB$  находим

$$b_{1,2'} = e_{2,3}C = e_{2,3}A = \frac{AB}{\operatorname{tg} 30^\circ} = AB \sqrt{3}.$$

3. Определяем базис эквивалентного ромба

$$b_0 = b_{1,2} \cdot \sin \varphi_{1,2} = AB \sqrt{3} \sin 30^\circ = \frac{AB \sqrt{3}}{2}$$

и расстояние от ребра  $e_{2,3}$  до плоскости эквивалентного зеркала

$$p_0 = -b_{1,2} \cdot \cos \varphi_{1,2} = -AB \sqrt{3} \cos 30^\circ = -\frac{3}{2} AB.$$

4. Для призмы с учетом хода луча в стекле находим

$$b_{03} = \frac{\sqrt{3}}{2} AB - \frac{n-1}{2n} d.$$

Таким образом, эквивалентной ЗС для призмы Аббе являются ОЗ, перпендикулярное плоскости главного сечения призмы, и ЗР с базисом  $b_{03}$ , перпендикулярный ОЗ.

**Пример 5.** Приведение призмы, склеенной из двух частей (БП—90° и АР—90°, рис. 37), к эквивалентному виду. Систему отражающих поверхностей представим в виде  $УЗ_{1,2}$  и  $ОЗ_3$ .

Порядок приведения призмы к эквивалентному виду следующий.

1. Строим повернутое положение  $УЗ_{1,2}$ , при котором зеркало 2 занимает положение  $2'$ , параллельное 3. Получаем ЗР  $2',3$  и  $ОЗ_{1'}$ .

2. При повороте  $УЗ_{1,2}$  вокруг ребра  $\vec{e}_{1,2}$  определяем  $b_{2',3}$  (базис ромба  $ЗР_{2',3}$ ) как расстояние от ребра  $\vec{e}_{1,2}$  до  $ОЗ_3$ . Из треугольника  $Аe_{1,2}B$  находим  $b_{2',3} = a \cos 45^\circ (1 - \operatorname{ctg} 22^\circ 30')$ .

3. Определяем базис эквивалентного ЗР

$$\begin{aligned} b_0 &= b_{2',3} \sin \varphi_{1,2} = a \cos 45^\circ (1 - \operatorname{ctg} 22^\circ 30') \sin 45^\circ = \\ &= \frac{a}{2} (1 - \operatorname{ctg} 22^\circ 30') \end{aligned}$$

и расстояние от ребра  $\vec{e}_{1,2}$  до плоскости эквивалентного зеркала

$$p_0 = -b_{2',3} \cos \varphi = -\frac{a}{2} (1 - \operatorname{ctg} 22^\circ 30').$$

4. Для призмы с учетом хода луча в стекле находим

$$b_{03} = b_0 - \frac{n-1}{2n} d.$$

**Пример 6.** Приведение призмы Шмидта (ВР—45°) (рис. 38) к эквивалентному виду. Систему отражающих поверхностей призмы представим как  $УЗ_{1,2}$  с вершиной  $\vec{e}_{1,2}$   $ОЗ_3$ .

Порядок приведения призмы к эквивалентному виду следующий

1. Строим повернутое на угол  $67^\circ 30'$  положение  $УЗ_{1',2'}$  при котором  $2'$  параллельно 3. Получаем ЗР  $2',3$  и  $ОЗ_{1'}$ .

2. При повороте вокруг ребра  $\vec{e}_{1,2}$   $УЗ_{1,2}$  определяем (базис  $ЗР_{2',3}$ )  $b_{2',3}$  как расстояние от  $e_{1,2}$  до  $ОЗ_3$ . Из треугольника  $АBe_{1,2}$  находим

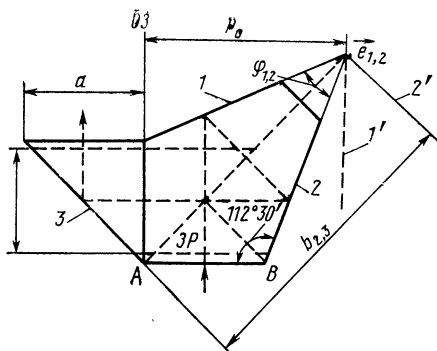


Рис. 37. Преобразование пентапризмы и прямоугольной призмы

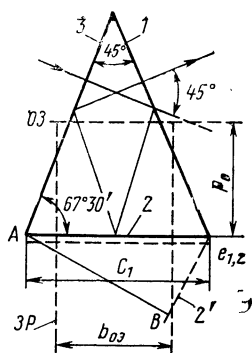


Рис. 38. Преобразование призмы Шмидта

$$b_{2',3} = C_1 \sin 67^\circ 30'.$$

3. Определяем базис  $3P$

$$b_0 = b_{2',3} \sin \varphi_{1,2} = b_{2',3} \sin 67^\circ 30' = C_1 \sin^2 67^\circ 30'$$

и расстояние от ребра  $e_{1,2}$  до плоскости эквивалентного зеркала

$$p_0 = b_{2',3} \cos \varphi_{1,2} = -C_1 \sin 67^\circ 30' \cos 67^\circ 30' =$$

$$= -\frac{1}{2} C_1 \sin 135^\circ.$$

4. Для призмы с учетом хода луча в стекле определяем

$$b_{03} = b_0 - \frac{n-1}{2n} d.$$

## ЧЕТВЕРНЫЕ ЗЕРКАЛА

Четверному зеркалу — зеркальной системе, состоящей из четырех зеркал, отводится особое место, так как это часто встречающаяся ЗС (например, в виде призм с четырьмя отражениями), и действие двух УЗ со скрещивающимися ребрами сводится к наиболее общему случаю — винтовому перемещению пространства, представляющему большой интерес для оплотехники.

Четыре плоских зеркала в ЗС могут находиться в виде следующих комбинаций:

1) двух ЗР, приводимых к одному ЗР путем геометрического сложения ортов их нормалей первых по паданию лучей зеркал, умноженных на их линейные базисы;

2) одного ЗР и одного УЗ, приводимых к инвариантному виду; ЗР устанавливается перпендикулярно к УЗ;

3) двух УЗ.

Ввиду сложности этих систем рассмотрим варианты их относительного расположения:

а) ребра коллинеарны (поворот пространства осуществляется в одной плоскости) — ЗС приводится к одному УЗ с ребром, коллинеарным ребрам исходных УЗ;

б) ребра пересекаются (имеется эквивалентный поворот) — ЗС приводится к одному УЗ с ребром, пересекающимся с ребрами исходных УЗ в точке их пересечения и угловым базисом, определяемым по формуле (137);

в) ребра скрещиваются — наиболее общий случай (винтовое перемещение пространства) — ЗС приводится к УЗ и перпендикулярному к нему ЗР.

Проанализируем случай 3б. Задача нахождения ребра и углового базиса УЗ, эквивалентного двум исходным, может решаться любым из математических способов, рассмотренных в гл. 1. В 1935 г. впервые применительно к оплотехнике эта задача была решена векторным способом А. И. Тудоровским [26]. Замена одним УЗ двух исходных есть не что иное, как отыскание оси и угла поворота пространства, эквивалентного двум исходным поворотам. Особенность задачи при рассмотрении действия УЗ заключается лишь в том, что угол поворота пространства УЗ равен двойному его угловому базису — двугранному углу между зеркалами. Перед тем как перейти к решению данной задачи, отметим, что, используя метод инвариантности вращения УЗ вокруг его ребра, можно установить третье зеркало вращением которого УЗ перпендикулярно второму и заменить оба эти зеркала одним ОЗ, перпендикулярным к ним,

и соответственно изменить знак у вектора падающего луча. В результате этого приходим к тройному зеркалу, рассмотренному в гл. 3. Повернув второе УЗ вокруг его ребра до параллельности второго зеркала третьему, можно также получить эквивалентное УЗ, состоящее из четырех зеркал.

## 1. ЗАМЕНА ДВУХ УГЛОВЫХ ЗЕРКАЛ

### С ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ РЕБРАМИ ОДНИМ УГЛОВЫМ ЗЕРКАЛОМ

Рассмотрим вначале решение задачи с применением теории конечных поворотов твердого тела. Преобразование пространства двумя зеркально отражающими плоскостями, образующими двугранный угол и составляющими УЗ, представляет собой поворот пространства вокруг ребра УЗ в направлении от первой отражающей по ходу лучей плоскости ко второй на угол, равный двойному значению двугранного угла. Преобразованию пространства парой зеркально отражающих плоскостей 1 и 2, которые пересекаются по оси  $\vec{e}_1$  и составляют двугранный угол  $\varphi_1$  (рис. 39), можно поставить в соответствие конечный поворот твердого тела на угол  $2\varphi_1$  вокруг той же оси  $\vec{e}_1$ . Вектор конечного поворота пространства  $\vec{\theta}_1$  в этом случае выражается формулой (15), из которой видно, что вектор конечного поворота  $\vec{\theta}$  зависит только от параметров, определяющих взаимное положение плоскостей зеркал 1 и 2.

Свойство инвариантности УЗ к его ребру позволяет дать наглядную геометрическую интерпретацию операциям сложения двух конечных поворотов твердого тела и разложения одного конечного поворота твердого тела на два и более составляющих его конечных поворота.

Можно сформулировать следующее положение: любое число конечных поворотов твердого тела (УЗ) с указанием их последовательности, осуществляемое вокруг пересекающихся осей (ребер УЗ), может быть заменено одним конечным поворотом твердого тела (одним УЗ). Обратное несправедливо — нельзя разложить один конечный поворот пространства на два и более поворота вокруг за-

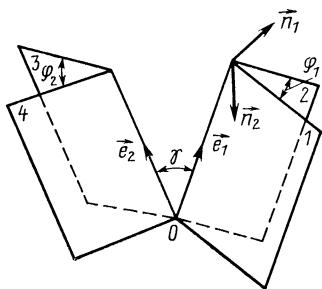


Рис. 39. Преобразование угловых зеркал с общим ребром

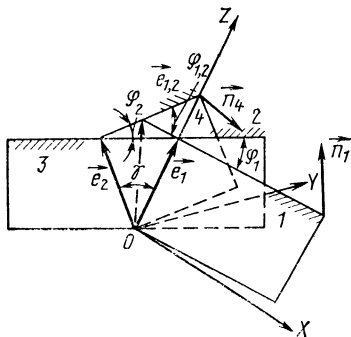


Рис. 40. Угловые зеркала после поворота вокруг их ребер

ранее заданных осей, что может быть выражено следующим определением: если заданы три пересекающиеся в одной точке оси, то имеется только одно определенное значение угла поворота пространства вокруг любой из них, которое может быть разложено по двум другим осям.

Рассмотрим задачу сложения двух конечных поворотов. Орты осей конечных поворотов  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  (см. рис. 39) расположены под углом  $\gamma$  один к другому и пересекаются в точке  $O$ . Углы поворотов вокруг  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  равны соответственно  $2\varphi_1$  и  $2\varphi_2$ .

Конечные повороты твердого тела, кроме выражения (15), могут быть представлены в виде

$$\vec{\theta}_1 = 2 \frac{\vec{n}_2 \times \vec{n}_1}{\vec{n}_1 \vec{n}_2}; \quad (133)$$

$$\vec{\theta}_2 = 2 \frac{\vec{n}_4 \times \vec{n}_3}{\vec{n}_3 \vec{n}_4}, \quad (134)$$

а результирующий вектор поворота твердого тела определяется по известной формуле Родрига — Гамильтона (17). Этой формулой не всегда удобно пользоваться, кроме того, она не дает наглядности решения задачи, поэтому обратимся к другому методу, который можно назвать методом вращения угловых зеркал вокруг их ребер.

Используем инвариантность вращения УЗ вокруг их ребер  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$ , что позволяет произвольно располагать грани одного двугранного угла по отношению к граням другого. Имея в виду это свойство, повернем двугранные углы так, чтобы плоскости зеркал 2 и 3 совместились между собой сторонами, у которых противоположно направлены отражения. Очевидно, что расположение этой общей для зеркал 2 и 3 плоскости однозначно определяется ортами  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  (рис. 40), которые должны в ней лежать.

Орты нормалей  $\vec{n}_2$  и  $\vec{n}_3$  зеркал 2 и 3 теперь направлены противоположно один другому, поэтому  $\vec{n}_2 = -\vec{n}_3$ . Действия совмещенных указанным образом плоскостей взаимно компенсируются, и преобразование пространства системой из двух пар плоскостей теперь обуславливается одной парой зеркал 1 и 4, образующих двугранный угол  $\varphi_{1,2}$  с ортом ребра  $\vec{e}_{1,2}$ . Угол  $\varphi_{1,2}$  и положение оси результирующего поворота определяются из соотношений

$$\varphi_{1,2} = \pi - \arccos(\vec{n}_1 \vec{n}_4); \quad (135)$$

$$\vec{e}_{1,2} = \frac{\vec{n}_4 \times \vec{n}_1}{|\vec{n}_4 \times \vec{n}_1|}. \quad (136)$$

Для вектора суммарного конечного поворота  $\vec{\theta}_{1,2}$  по аналогии с (15) можно записать векторное выражение

$$\vec{\theta}_{1,2} = 2 \frac{\vec{n}_4 \times \vec{n}_1}{\vec{n}_1 \vec{n}_4}. \quad (137)$$

Идентичность формул (17) и (137) можно доказать, представив векторы  $\vec{\theta}_1$  и  $\vec{\theta}_2$  и орты нормалей  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_4$  через их координаты, например в принятой на рис. 40 системе координат  $OXYZ$  (ось  $OZ$  направлена по орту  $\vec{e}_1$ , а плоскость  $XOZ$  проходит через орт  $\vec{e}_2$ ).

Орты нормалей будут выражены следующим образом:

$$\vec{n}_1 = \sin \varphi_1 \vec{i} + \cos \varphi_1 \vec{j}; \quad (138)$$

$$\vec{n}_4 = \sin \varphi_2 \cos \gamma \vec{i} - \cos \varphi_2 \vec{j} + \sin \varphi_2 \sin \gamma \vec{k}. \quad (139)$$

После подстановки ортов  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_4$  в уравнение (137) и выполнения несложных преобразований, которые опустим, получаем формулу (17). Для доказательства тождественности этих формул без связи с выбором системы координат, подставив в формулу (17) величины  $\theta_1$  и  $\theta_2$  из формул (133) и (134) и учитывая, что  $\vec{n}_3 = -\vec{n}_2$ , также можно получить формулу (137).

Таким образом, если задать СК так, как это рекомендовано рис. 40, что соответствует координатам ортов  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_4$  по формуле (139), то для получения результирующего конечного поворота  $\vec{\theta}_{1,2}$  по формуле (137) достаточно найти их векторное произведение и разделить его на скалярное произведение:

$$\begin{aligned} \vec{\theta}_{1,2} &= 2 \operatorname{tg} \varphi_{1,2} \vec{e}_{1,2} = -2 \frac{\vec{n}_1 \times \vec{n}_4}{\vec{n}_1 \vec{n}_4} = \\ &= 2 \frac{\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \gamma \vec{i} - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \gamma \vec{j} + (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \\ &\quad \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \gamma - \cos \varphi_1 \cos \varphi_2) \vec{k}}{\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \gamma + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \gamma}. \end{aligned} \quad (140)$$

В последней формуле дано разложение результирующего вектора конечного поворота твердого тела  $\vec{\theta}_{1,2}$  по осям выбранной СК, причем знаменатель в этой формуле равен  $\cos \varphi_{1,2}$ , что позволяет определить угловой базис  $\varphi_{1,2}$   $\vec{U}_{3,2}$ . Для получения координат орта ребра  $\vec{e}_{1,2}$  надо выражение (140) разделить на  $2 \operatorname{tg} \varphi_{1,2}$ .

## 2. ЗАМЕНА ДВУХ УГЛОВЫХ ЗЕРКАЛ СО СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ РЕБРАМИ ЗЕРКАЛЬНЫМ РОМБОМ И УГЛОВЫМ ЗЕРКАЛОМ

Используем, так же как и в предыдущем параграфе, метод вращения  $\vec{U}_3$  вокруг их ребер. Установив зеркала 2 и 3 параллельно одно другому, получим дополнительный зеркальный ромб с базисом  $OO_1 = b$  (рис. 41), равным расстоянию между ребрами  $\vec{e}_1$  и

$\vec{e}_2$  исходных УЗ. Систему координат  $\vec{OXYZ}$  выберем так, чтобы ось  $OZ$  была совмещена с ортом  $\vec{e}_2$  проекцией ребра  $\vec{e}_2$  на плоскость второго зеркала, и в этой же плоскости расположим ось  $OX$ . Ось  $OY$  совместим с общим перпендикуляром к ребрам  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$ . Угол между скрещивающимися осями  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  обозначим  $\gamma$ . Расстояние  $b$  между ребрами  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  может быть получено по известной из векторной алгебры формуле [10]

$$b = \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)}{|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|}, \quad (141)$$

где  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  — радиус-вектор произвольных точек осей, определяемых ортами  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$ , в частности  $\vec{r}_2$  может быть взято равным  $\vec{j}$ .

В нашем случае начало СК, точка  $O$ , лежит на оси  $\vec{e}_1$ , поэтому  $\vec{r}_1 = 0$ , и это уравнение несколько упрощается и принимает вид

$$b = \frac{\vec{r}_2 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)}{\sin \gamma}. \quad (142)$$

Таким образом, получена ЗС, состоящая из зеркала 1, зеркального ромба 2 и 3 и зеркала 4. На основе рассмотренного в п. 5 гл. 3 правила перестановок по ходу лучей ЗР и ОЗ вынесем ЗР<sub>2,3</sub> за зеркало 4. Для этого достаточно повернуть ЗР<sub>2,3</sub> на угол  $\pi - 2\varphi_2$  по часовой стрелке в плоскости  $XOY$ ,

перпендикулярной к ребру  $\vec{e}_2$ . Тогда придем к последовательности зеркал ОЗ<sub>1</sub>, ОЗ<sub>4</sub> и ЗР<sub>2',3'</sub>. Далее необходимо найти точку пересечения следов зеркал 1 и 4 в плоскости  $XOY$ , через эту точку должно пройти ребро эквивалентного УЗ<sub>1,4</sub>.

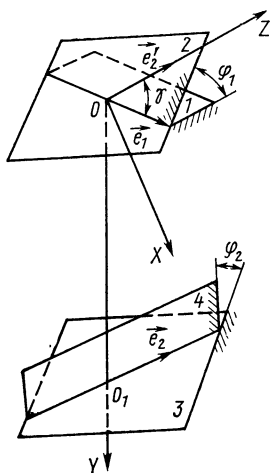


Рис. 41. Угловые зеркала со скрещенными ребрами

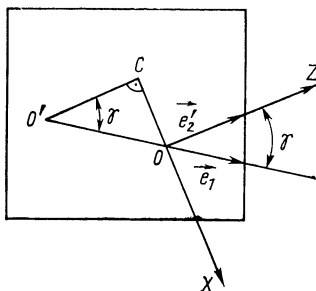


Рис. 42. Связь системы координат при эквивалентной замене УЗ



След  $\vec{O'C}$  зеркала 4 в плоскости  $XOZ$  показан на рис. 42. С учетом расстояния  $b$  между зеркалами 2 и 3 (см. рис. 41) отрезок

$$OC = b \operatorname{ctg} \varphi_2,$$

а из прямоугольного треугольника  $OO'C$  с углом  $\gamma$  при вершине  $O'$  отрезок

$$O'C = OC \operatorname{ctg} \gamma = b \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} \varphi_2. \quad (143)$$

Таким образом, можно перенести новое начало координат в точку  $O'$ , тогда данная задача сведется к задаче, рассмотренной в п. 1 данной главы. Орт ребра  $\vec{e}_{1,2}$  эквивалентного УЗ найдется по формуле (140), а угловой базис этого УЗ по формуле (135). Одно- столбцовые матрицы из координат ортов  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_4$  (рис. 41)

$$N_1 = \begin{pmatrix} -\sin \varphi_1 \cos \gamma \\ -\cos \gamma \\ \sin \varphi_1 \sin \gamma \end{pmatrix};$$

$$N_4 = \begin{pmatrix} -\sin \varphi_2 \\ \cos \varphi_2 \end{pmatrix}.$$

Осталось лишь привести ЗС, состоящую из  $\vec{U}_{31,4}$  и  $\vec{ZP}_{2,3}$ , к инвариантному виду. Для этого необходимо найти угол  $\eta$  между ребром  $\vec{e}_{1,2}$  и ортом  $\vec{n}_2'$  второго зеркала  $\vec{ZP}_{2',3'}$  после его поворота на угол  $\pi - 2\varphi_2$ . Одно столбцовая матрица из координат орта  $\vec{n}_2'$  имеет вид

$$N_{2'} = \begin{pmatrix} \sin 2\varphi_2 \\ -\cos 2\varphi_2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\eta = \pi - \arccos(\vec{e}_{1,2} \vec{n}_2').$$

Базис  $b'$  эквивалентного ЗР, перпендикулярного к ребру  $\vec{e}_{1,2}$ ,

$$b' = b \cos \eta = b(\vec{e}_{1,2} \vec{n}_2'),$$

и соответствующий компенсационный сдвиг  $\vec{U}_{312}$  найдем согласно задаче, рассмотренной в п. 5 гл. 3. Для этого надо знать расположение плоскости, в которой находятся  $\vec{e}_{1,2}$  и  $\vec{n}_2'$ . Это легко определить по ортам нормали  $\vec{n}_2'$  и ребра  $\vec{e}_{1,2}$

$$\vec{n}_{1,2} = \frac{\vec{e}_{1,2} \times \vec{n}_2'}{\sin \eta}. \quad (144)$$

### 3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УГЛОВОГО ЗЕРКАЛА В ВИДЕ ДВУХ ЕМУ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ УГЛОВЫХ ЗЕРКАЛ

Эта задача является обратной предыдущей, поэтому можно воспользоваться рис. 40 и исходным считать УЗ, состоящее из зер-

кал 1 и 4. Тогда зеркала 2 и 3, которые лежат в одной плоскости, будут искомыми и в совокупности с зеркалами 1 и 4 соответственно дадут новые  $\vec{U}_1$  и  $\vec{U}_2$ , а линии их пересечения будут представлять собой ребра  $e_1$  и  $e_2$ .

При замене двух  $\vec{U}_3$  одним следует иметь в виду: если заданы орты  $e_1$  и  $e_2$  осей и углы  $2\varphi_1$  и  $2\varphi_2$  двух последовательных поворотов тела, то орт результирующего поворота, эквивалентного этим двум поворотам, получается следующим построением: проводится плоскость через орты  $e_1$  и  $e_2$ , строятся две плоскости, расположенные к ней под углами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  и проходящие через  $e_1$  и  $e_2$ . Их пересечение и даст положение результирующей оси  $e_{1,2}$ , а углом  $\varphi_{1,2}$  будет являться либо угол между ними, либо угол дополнительный до  $\pi$ . Ребра искоемых  $\vec{U}_3$  должны лежать в плоскостях зеркал 1 и 4, но сами эти плоскости совместно могут быть повернуты, как угодно вокруг их линии пересечения (ребра  $e_{1,2}$ ). Отсюда вытекает важное свойство — одно из искоемых составляющих  $\vec{U}_1$  и  $\vec{U}_2$  может быть задано произвольно как по положению ребра, так и по угловому базису. Это естественно, так как в сферическом треугольнике для его полной определенности должны быть заданы три параметра из шести, в данном случае углы  $\varphi_{1,2}$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_1$ . Итак, при разложении вектора конечного поворота (одного  $\vec{U}_3$ ) на два эквивалентных ему конечных поворота (два  $\vec{U}_3$ ), один из конечных поворотов (одно из  $\vec{U}_3$ ) может быть выбран произвольно по углу поворота и по положению оси поворота. В частности, ребро одного из  $\vec{U}_3$ , и его угловой базис принят  $\varphi = \pi/2$ . Тогда плоскость зеркал 2 и 3 установится перпендикулярно к ребру  $e_{1,2}$ , и угловой базис другого  $\vec{U}_3$  будет также  $\pi/2$ . Это частное свойство разложения вектора конечного поворота на два с  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$  было известно давно, по-видимому, оно было сформулировано О. Родригом еще в прошлом веке. Это свойство можно сформулировать так: поворот тела на угол  $2\varphi$  вокруг некоторой оси эквивалентен двум последовательным полуоборотам тела вокруг осей, составляющих угол  $\varphi$  и пересекающихся с данной осью под прямым углом к ней.

Для определения параметров разложения одного поворота на два можно воспользоваться формулами сферической тригонометрии, считая, что орты  $e_{1,2}$ ,  $e_1$  и  $e_2$  являются единичными радиусами сфер с центром в точке  $O$ . Сферический треугольник, образованный вершинами ортов  $e_{1,2}$ ,  $e_1$  и  $e_2$ , имеет шесть параметров: три стороны против углов  $\gamma$ ,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , образованных ортами  $e_{1,2}$ ,  $e_1$  и  $e_2$ , и три двугранных угла  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_{1,2}$  (рис. 43). Один параметр — угол  $\varphi_{1,2}$  — известен, три других связаны формулами сферической тригонометрии, и, таким образом, свободными остаются всего два параметра из пяти. Особенно наглядно это видно из рис. 43,а. Например, если задать угол  $\gamma_1$ , то тем самым можно определить положение ребра  $e_1$ , так как оно должно лежать на зеркале 1, и далее может быть задан один из четырех параметров  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\gamma_1$  или  $\gamma_2$ . Правда, и здесь, хотя задается всего три параметра, надо считаться с некоторыми ограничениями. Так, угол  $\gamma$  при угле  $\gamma_1 = \pi/2$  не может быть меньше угла  $\varphi_{1,2}$ . Если углы, как установлено выше,

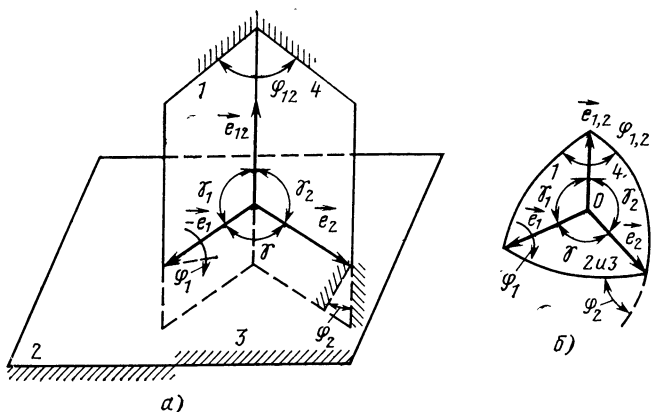


Рис. 43. Пересекающиеся тройные зеркала:  
а — в виде трех плоскостей; б — в виде сферического треугольника

$\gamma_1 = \gamma_2 = \varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$ , то угол  $\gamma = \varphi_{1,2}$ . Если углы  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  немного больше или немного меньше угла  $\pi/2$ , то угол  $\varphi_{1,2}$  также немного больше или немного меньше угла  $\gamma$ . Сумма углов  $\gamma_1 + \gamma_2$  может изменяться от 0 до  $\pi$ . Следует также учитывать, что сумма двугранных углов в сферическом треугольнике ( $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_{1,2}$ ) может принимать значения от  $\pi$  до  $2\pi$ .

#### 4. ИЗМЕНЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ РАСПОЛОЖЕНИЯ ДВУХ УГЛОВЫХ ЗЕРКАЛ

Рассмотрим случай пересекающихся ребер двух УЗ: если же их ребра скрещиваются, то в соответствии с п. 2 данной главы образуется дополнительно ЗР, который переносится за четвертое зеркало (базис ЗР равен расстоянию между этими ребрами), и задача решается так же, как для УЗ с пересекающимися ребрами. Итак, действие двух УЗ (см. п. 1 данной главы), ребра которых пересекаются, аналогично двум конечным поворотам твердого тела. Углы поворотов равны двойным угловым базисам УЗ, а оси этих поворотов совмещаются с ребрами УЗ. Решение задачи в последней трактовке для целей аналитической механики находим в работе [14]. Обратимся к рис. 44, на котором показаны орты  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  ребер УЗ<sub>1</sub> и УЗ<sub>2</sub> и дуги на сфере единичного радиуса, образованные радиус-вектором точки при соответствующих поворотах, причем одной стрелкой показан первый поворот, двойной — второй. На сфере есть точка  $M$ , которая в результате поворота пространства УЗ<sub>1</sub> на угол  $2\varphi_1$  переходит в точку  $M'$ , которая при воздействии УЗ<sub>2</sub> — второго поворота пространства на угол  $2\varphi_2$  — снова возвращается в исходную точку  $M$ . Следовательно, точка  $M$  является неизменной точкой и, будучи соединенной с точкой пересечения ортов  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  (центром сферы), даст инвариантное направление данного преобразования пространства. Если изменить последовательность поворотов, то не-

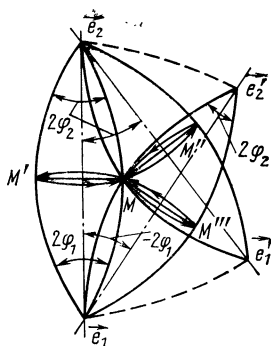


Рис. 44. Преобразование пространства при изменении последовательности падения лучей на УЗ

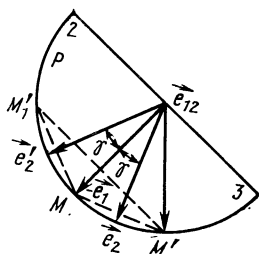


Рис. 45. Преобразование пространства при угловых базисах УЗ  $\varphi = \pi/2$

изменной точкой окажется точка  $M'$ , которая  $УЗ_2$  переведется в точку  $M$ , а затем под действием  $УЗ_1$  перейдет вновь в точку  $M'$ . Нам же необходимо при изменении последовательности поворотов сохранить инвариантную ось неизменной, т. е. неизменной точкой должна быть по-прежнему точка  $M$ . Из рис. 44 видно, что решение задачи достигается при повороте орта  $\vec{e}_1$  в положение  $\vec{e}_1'$  на угол  $2\varphi_2$  вокруг орта  $\vec{e}_2$ . Теперь при первом повороте вокруг орта  $\vec{e}_2$  на угол  $2\varphi_2$  точка  $M$  перейдет в точку  $M''$ , и при втором повороте на угол  $2\varphi_1$  вокруг орта  $\vec{e}_1'$  она возвратится снова в точку  $M$ , следовательно, при этом сохранится прежнее положение инвариантной оси.

Вторым решением задачи является предварительный поворот орта  $\vec{e}_2$  в положение  $\vec{e}_2'$  вокруг орта  $\vec{e}_1$  на двойной угловой базис  $2\varphi_1$ . Теперь точка  $M$  перейдет в результате первого поворота вокруг  $\vec{e}_2'$  на угол  $2\varphi_2$  в точку  $M'''$ , и поворотом на  $2\varphi_1$  вокруг  $\vec{e}_1$  она вернется в точку  $M$ . Таким образом, если конструктору по каким-либо соображениям будет целесообразно вначале направить лучи на  $УЗ_2$ , а затем на  $УЗ_1$ , то для того чтобы общий ход лучей в системе не изменился, достаточно повернуть  $УЗ_1$  вокруг ребра  $УЗ_2$  на угол  $2\varphi_2$  или повернуть  $УЗ_2$  вокруг ребра  $УЗ_1$  на угол  $2\varphi_1$ .

Рассмотрим изменение последовательности отражений на примере перпендикулярного расположения зеркал 2 и 3 к зеркалам 1 и 4 (рис. 45). С плоскостью чертежа совмещена плоскость  $P$ , в которой лежат зеркала 2 и 3, наложенные противоположными отражающими плоскостями. Зеркала 1 и 4 перпендикулярны плоскости  $P$ , след зеркала 1 — это орт  $\vec{e}_1$ , а след зеркала 4 — орт  $\vec{e}_2$ . Орт  $\vec{e}_{1,2}$  проектируется в точку, а угол  $\varphi_{1,2} = \gamma$ . Точка  $M$ , лежащая для простоты на ребре  $\vec{e}_1$ , изображается в точке  $M'$  после второго поворота на угол  $\pi$  вокруг орта  $\vec{e}_2$ . При обратной последовательности пово-

ротов (вначале вокруг орта  $\vec{e}_2$ ) точка  $\vec{M}$  сначала перейдет в точку  $M'$  и при повороте на угол  $\pi$  вокруг  $\vec{e}_1$  в точку  $M_1$ , что изменит характер преобразования пространства. Если при втором варианте орт  $\vec{e}_2$  повернут предварительно относительно  $\vec{e}_1$  на угол  $\pi$  и занял положение  $\vec{e}_2$ , то при повороте на угол  $\pi$  вокруг этой оси точка  $M$  переходит в точку  $M'_1$  и далее при повороте вокруг орта  $\vec{e}_1$  также на угол  $\pi$  в точку  $M'$ , что не нарушит преобразования.

## 5. ИЗМЕНЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ РАСПОЛОЖЕНИЯ УГЛОВОГО ЗЕРКАЛА И ЗЕРКАЛЬНОГО РОМБА

Будем считать, что ребро  $\vec{e}_{1,2}$  углового зеркала параллельно оси  $OZ$  правой декартовой СК, а орты нормалей  $\vec{n}_3$  и  $\vec{n}_4$  зеркал ЗР параллельны плоскости  $XOZ$  (рис. 46). Если эти орты не лежат в плоскости  $XOZ$ , то следует иметь дело с их составляющими в этой плоскости. Введем матрицы  $R, R', R''$  из координат точек  $M, M'$  и  $M''$ ;  $N_3$  из координат орта нормали  $\vec{n}_3$  и  $R_0$  из координат точки  $M_0$  (радиус-вектор  $\vec{r}_0$ ) на ребре  $\vec{e}_{1,2}$  УЗ.

Пусть первоначально имеем систему  $УЗ \rightarrow ЗР$ . Тогда для отражения лучей в  $УЗ_{1,2}$  согласно (67) запишем

$$R' = T_{УЗ}R - Q_{УЗ}, \quad (145)$$

где  $Q_{УЗ}$  — величина, условно принимаемая за сдвиг пространства (в действительности  $УЗ$  только поворачивает пространство), есть характеристика положения ребра  $\vec{e}_{1,2}$  УЗ:

$$Q_{УЗ} = (E - T_{УЗ}) R_0. \quad (146)$$

Для последующего отражения лучей в  $ЗР_{3,4}$  с учетом (145) и (146) имеем матрицу

$$\begin{aligned} R'' &= T_{ЗР}R' + Q_{ЗР} = R' + Q_{ЗР} = T_{УЗ}R + Q_{УЗ} + Q_{ЗР} = \\ &= T_{УЗ}R + (E - T_{УЗ}) R_0 + 2bN_3 = R_0 + T_{УЗ}(R - R_0) + 2bN_3. \end{aligned} \quad (147)$$

В векторном виде выражение (147) имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{r}'' &= \vec{r}_0 + (\vec{r} - \vec{r}_0)' + 2b\vec{n}_3 = \vec{r}_0 + (\vec{r} - \vec{r}_0) \cos 2\varphi + \\ &+ \vec{e}_{1,2} [\vec{e}_{1,2} (\vec{r} - \vec{r}_0)] (1 - \cos 2\varphi) + \vec{e}_{1,2} (\vec{r} - \vec{r}_0) \sin 2\varphi + 2b\vec{n}_3. \end{aligned} \quad (148)$$

Здесь третий член выражения может быть опущен, так как рассматриваются составляющие преобразования точки  $M$  в плоскости, перпендикулярной ребру  $\vec{e}_{1,2}$  УЗ, а в направлении своего ребра УЗ никакого действия на смещение изображения точки не оказывает, откуда скалярное произведение  $\vec{e}_{1,2}(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ .

Выбирая СК таким образом, чтобы радиус-вектор  $\vec{r}$  точки  $M$  лежал в плоскости, перпендикулярной к ребру  $\vec{e}_{1,2}$  УЗ, и выбирая

В этой же плоскости  $\vec{r}_0$ , т. е. переходя, как указывалось, к плоской задаче (в плоскости  $XOY$ ) (рис. 47), из выражения (148) с учетом равенства нулю третьего члена радиус-вектор положения преобразованной точки  $M''$  будет иметь вид

$$\vec{q} = \vec{r}_0 + (r - r_0) \cos 2\varphi + \vec{e}_{1,2} (r - r_0) \sin 2\varphi + 2b\vec{n}_3. \quad (149)$$

Составляющая  $2b\vec{n}_3$  может быть получена, если исходным является  $\vec{n}_3$ , не лежащий в плоскости  $XOY$ , по формуле

$$2b\vec{n}_3 = 2b' [\vec{n}_3' - \vec{e}_{1,2} (\vec{n}_3' \vec{e}_{1,2})].$$

Из выражения (149) следует, что вектор изображения точки  $M$  (радиус-вектор  $\vec{q}$ ) получается как сумма радиус-вектора  $\vec{r}_0$ , вектора  $\vec{r} - \vec{r}_0$  после его поворота вокруг ребра  $\vec{e}_{1,2}$   $U_{3,2}$  на угол  $2\varphi$  и вектора  $2b\vec{n}_3$ .

Последовательность отражений  $3P \rightarrow U_3$  можно достигнуть, не перемещая  $3P_{3,4}$ , а поступательно сместив  $U_{3,2}$  так, что положение орта ребра  $\vec{e}_{1,2}$  будет определяться радиус-вектором  $\vec{r}_0$  (рис. 47). В этом случае в уравнении (147) надо заменить  $R$  на  $R + 2bN_3$ ,  $R_0$  на  $R'_0$ , а  $2bN_3$  исключить, так как этот вектор вошел в первоначальный сдвиг  $R + 2bN_3$ ; тогда получим

$$R'' = T_{U_3} (R + 2bN_3) + (E - T_{U_3}) R'_0. \quad (150)$$

Для определения радиус-вектора  $R'_0$  приравняем это выражение к формуле (147)

$$R_0 + T_{U_3} (R - R_0) + 2bN_3 = T_{U_3} (R + 2bN_3) + (E - T_{U_3}) R'_0.$$

Раскрыв скобки и сгруппировав члены, получим

$$(E - T_{U_3}) R'_0 = (E - T_{U_3}) R_0 + (E - T_{U_3}) 2bN_3. \quad (151)$$

Умножив левую и правую часть на матрицу  $(E - T_{U_3})^*$ , получим

$$R'_0 = R_0 + 2bN_3.$$

Таким образом,  $U_{3,2}$  должно быть сдвинуто на вектор

$$\vec{e}_{1,2} \vec{e}_{1,2} = \vec{r}_0' - \vec{r}_0 = 2b\vec{n}_3. \quad (152)$$

При этом преобразовании  $3P_{3,4}$  переводит точку  $M$  в точку  $M'_2$  и затем  $U_{3,4}$  с ребром орта  $\vec{e}_{1,2}$  переводит  $M'_2$  в точку  $M''$ .

Последовательности отражений  $3P \rightarrow U_3$  можно также достигнуть, изменив положение  $3P$  (орт  $\vec{n}_3$  перейдет в  $\vec{n}_3'$ ). В этом случае для отражения в  $3P_{3,4}$

$$R' = R + Q_{3P}.$$

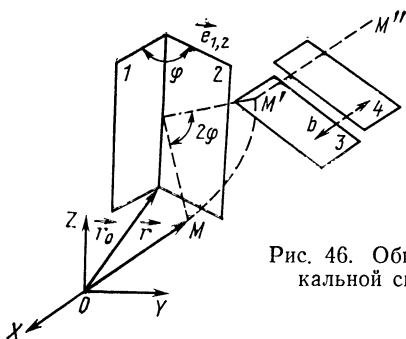


Рис. 46. Общий вид четырехзеркальной системы из УЗ и ЗР

Рис. 47. Два варианта расположения УЗ при изменении последовательности отражения лучей (ЗР не поворачивается).

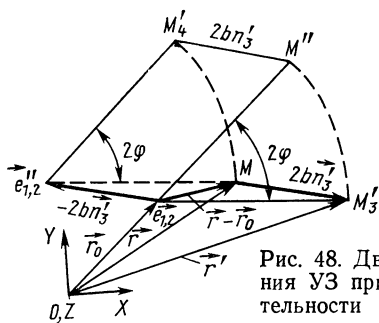
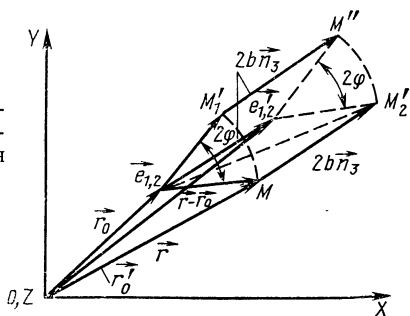


Рис. 48. Два варианта расположения УЗ при изменении последовательности отражения лучей (ЗР поворачивается)

Затем, используя матрицу (147), получаем

$$R'' = R_0 + T_{Y3} (R - R_0) + T_{Y3} 2bN'_3, \quad (153)$$

где  $Q'_{3P} = T_{Y3} 2bN'_3$ .

В этом выражении по сравнению с (147) имеет место дополнительный поворот вектора  $2bN'_3$  вокруг орта  $\vec{e}_{1,2}$  УЗ на угол  $2\varphi$ .

Найдем положение орта нормали  $\vec{n}_3'$  нового положения  $ЗР'_{3,4}$ , при котором выражения (147) и (151) превращаются в тождество. Для этого должно быть

$$T_{y3}N'_3 = N_3$$

или

$$N'_3 = T_{y3}N_3,$$

где  $T_{y3} = L_{Oz}(-2\varphi)$  — матрица поворота пространства на угол  $-2\varphi$  вокруг орта  $\vec{e}_{1,2}$  (рис. 48).

Орт  $\vec{n}_3$  повернут в положение  $\vec{n}_3'$  на угол  $-2\varphi$ , и после воздействия повернутого  $ЗР_{3,4}$  на точку  $M$  переведет ее в положение  $M'_3$ , и далее  $УЗ_{1,2}$  совместит ее с точкой  $M''$ . Таким образом, при последовательности отражений  $ЗР \rightarrow УЗ$  получают два варианта образования четверного зеркала: в первом (см. рис. 47) вместе со

Таблица 7

№ варианта	Характер последующего отражения лучей	№ рис.	Положение следа орта ребра $УЗ_{1,2}$		Положение орта нормали $ЗР_{3,4}$	
			Обозначение	Положение	Обозначение	Положение
1	УЗ $\rightarrow$ ЗР	47	$e_{1,2}$	Определяется радиус-вектором $\vec{r}_0$	$\vec{n}_3$	Исходное
2		48	$e''_{1,2}$	Сдвиг $\vec{e}_{1,2} \xrightarrow{\quad} \vec{e}''_{1,2} = -2b\vec{n}_3$	$\vec{n}_3$	$\vec{n}_3$ — повернутый орт $\vec{n}_3$ на угол $-2\varphi$
3	ЗР $\rightarrow$ УЗ	47	$e_{1,2}$	Определяется радиус-вектором $\vec{r}_0$	$\vec{n}_3$	Исходное
4		48	$e'_{1,2}$	Сдвиг $\vec{e}_{1,2} \xrightarrow{\quad} \vec{e}'_{1,2} = 2b\vec{n}_3$	$\vec{n}_3$	Исходное



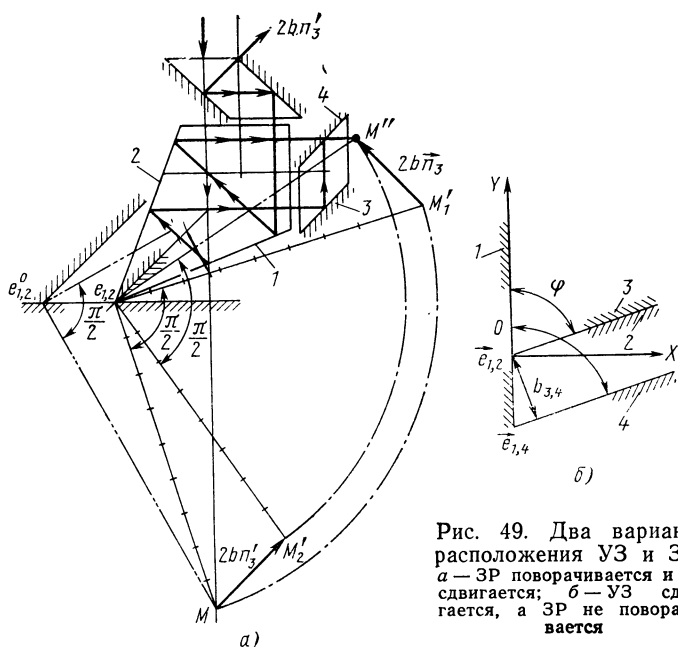


Рис. 49. Два варианта расположения УЗ и ЗР: а — ЗР поворачивается и УЗ сдвигается; б — УЗ сдвигается, а ЗР не поворачивается

сдвигом пространства ЗР на  $2b\vec{n}_3$  сдвинуто и УЗ в положение  $\vec{e}_{1,2}'$ , во втором (см. рис. 48) положение УЗ неизменно, но изменилось положение ЗР, последнее повернулось на угол  $-2\varphi$ .

Рассмотрим четвертый вариант относительного расположения  $УЗ_{1,2}$  и  $ЗР_{3,4}$  при последовательности  $УЗ \rightarrow ЗР$ , при котором точка  $M$  изображается в точке  $M''$ . Это сдвиг  $УЗ_{1,2}$  (см. рис. 48) на вектор  $2b\vec{n}_3'$  в положение ребра  $\vec{e}_{1,2}''$  при одновременно измененном положении  $ЗР_{3,4}$  (орт его ребра приведен в положение  $\vec{n}_3'$ ). В этом можно убедиться, используя приведенные выше формулы. При воздействии  $УЗ_{1,2}$  точка  $M$  переходит в точку  $M_4'$ , и далее  $ЗР_{3,4}$  с ортом  $\vec{n}_3'$  переводит эту точку в точку  $M''$ . Таким образом, установлено, что имеются четыре варианта относительного расположения ЗР и УЗ, при которых общий ход лучей в ЗПС не изменится. Полученные результаты сведены в табл. 7.

В качестве примера на рис. 49 для вариантов 1 и 3 табл. 7 приведена последовательность отражений  $УЗ \rightarrow ЗР$  и  $ЗР \rightarrow УЗ$ . Угловое зеркало выполнено в виде пентапризмы с углом между зеркалами  $45^\circ$ . Точка  $M$  проектируется УЗ в точку  $M_1'$ , и далее ЗР переносит ее в положение  $M''$ . Ход лучей показан одной стрелкой. Если изменить последовательность отражений на  $ЗР \rightarrow УЗ$ , то орт  $\vec{n}_3$  должен

быть повернут на угол  $2\varphi = \pi/2$ . Новое положение ЗР показано вверху, а ход лучей обозначен двумя стрелками. ЗР в этом случае переводит точку  $M$  в точку  $M'_2$ , и далее УЗ в том же положении поворотом пространства на угол  $\pi/2$  совмещает ее с точкой  $M''$ . Это четверное зеркало может быть приведено к угловому путем поворота УЗ из зеркал 1 и 2 на угол  $22^\circ 30'$  по часовой стрелке (рис. 49,а) и смещения  $OZ_3$  ЗР с  $OZ_2$  УЗ, после чего действие этих зеркал взаимно исключается, и на продолжении  $OZ_1$  и  $OZ_4$  в точке  $e_{1,2}^0$  получают эквивалентное УЗ, поворот пространства которым сразу приводит точку  $M$  в точку  $M''$ .

## 6. ИЗМЕНЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ РАСПОЛОЖЕНИЯ ЗЕРКАЛЬНЫХ РОМБОВ И УГЛОВЫХ ЗЕРКАЛ С КОЛЛИНЕАРНЫМИ РЕБРАМИ

Рассмотрим зеркальную систему, представляющую собой систему двух ЗР. Если имеем ЗР (зеркала 1 и 2) с базисом  $b_1$  и ортом нормали  $n_1$  и ЗР (зеркала 3 и 4) с базисом  $b_2$  и ортом  $n_3$ , а угол между  $n_1$  и  $n_3$  равен  $\pi - \alpha$  (рис. 50), то данная ЗС приводится к одному ЗР. Его базис определяется из геометрической суммы:  $b_1 n_1 + b_2 n_3 = b n$ , поэтому из треугольника ABC получим  $b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 - 2b_1 b_2 \cos \alpha}$ . Интересно отметить, что последовательность расположения ЗР не влияет на общий ход лучей в ЗПС, поэтому их можно переставлять как угодно, но без изменения их ориентации.

Теперь перейдем к зеркальной системе, представляющей собой систему двух УЗ, ребра которых коллинеарны и перпендикулярны плоскости чертежа. На рис. 51 показана УЗ<sub>1</sub> (зеркала 1 и 2) с ортом  $e_{1,2}$  и угловым базисом  $\varphi_1$  и УЗ (зеркала 3 и 4) с ортом  $e_{3,4}$  и угловым базисом  $\varphi_2$ . Расстояние между ребрами обозначено  $d$ . По-ворачивая эти УЗ вокруг их ортов  $e_{1,2}$  и  $e_{3,4}$ , добиваемся совмещения зеркал 2 и 3 обратными сторонами отражений с плоскостью, в которой лежат оба ребра УЗ. Таким образом, действие зеркал 2

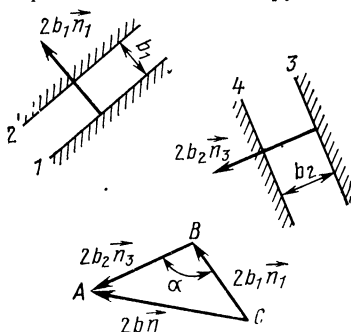


Рис. 50. Определение ЗР суммарного действия при двух исходных ЗР

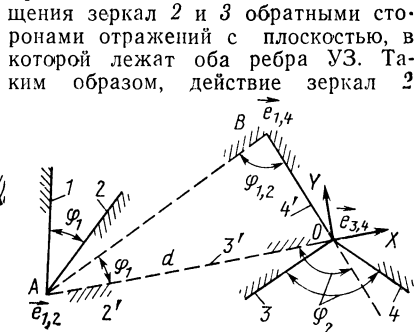


Рис. 51. Два УЗ с коллинеарными ребрами

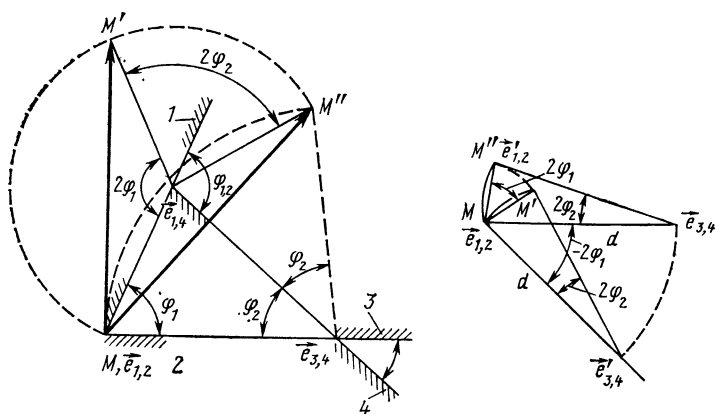


Рис. 52. Изменение последовательности падения лучей при двух УЗ с коллинеарными ребрами:  
 $a$  — используется УЗ<sub>14</sub>;  $b$  — УЗ<sub>14</sub> не используется

и 3 взаимно исключается. Отсюда получим эквивалентное УЗ, состоящее из зеркал 1 и 4 с ребром  $\vec{e}_{1,4}$  и угловым базисом  $\varphi_{1,2}$ . Координаты ребра и угол  $\varphi_{1,2} = \varphi_1 + \varphi_2$  определяем из треугольника  $ABO$ , вводя систему координат, как показано на рис. 51. Из указанного треугольника по теореме синусов получим

$$\frac{BO}{\sin \varphi_1} = \frac{d}{\sin (\varphi_2 - \varphi_1)}$$

и так как  $x_{e_{1,4}} = BO \cos \varphi_2$ ,  $y_{e_{1,4}} = BO \sin \varphi_2$ ,

то

$$\left. \begin{aligned} x_{e_{1,4}} &= \frac{d}{\operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{ctg} \varphi_1 - 1}; \\ y_{e_{1,4}} &= \frac{d}{[\operatorname{ctg} \varphi_1 - \operatorname{ctg} \varphi_2]}. \end{aligned} \right\} \quad (154)$$

Геометрическая интерпретация сложений поворотов при различной последовательности падения лучей на два УЗ приведена на рис. 52: Точка предмета  $M$  совмещена со следом  $e_{1,2}$  орта УЗ<sub>1</sub>. В результате сложения двух поворотов пространства УЗ<sub>1</sub> и УЗ<sub>2</sub> (см. рис. 51) получается один поворот вокруг орта  $\vec{e}_{1,4}$  на угол  $2\varphi_{1,2} = 2(\varphi_1 + \varphi_2)$ , что и показано на рис. 52,  $a$ . Что касается изменения последовательности отражений, то здесь так же как и в случае, рассмотренном в п. 4 данной главы, надо осуществить поворот орта ребра  $\vec{e}_{1,2}$  вокруг орта ребра  $\vec{e}_{3,4}$  на угол  $2\varphi_2$  или орта ребра  $\vec{e}_{3,4}$  вокруг орта ребра  $\vec{e}_{1,2}$  на угол  $-2\varphi_1$ .

При последовательности  $УЗ_1 \rightarrow УЗ_2$  (см. рис. 52, а)  $УЗ_1$  не оказывает какого-либо действия на точку  $M$ , так как она совмещена с его ребром, а  $УЗ_2$  повернет ее на угол  $2\varphi_2$  вокруг орта  $\vec{e}_{3,4}$ , и точка  $M$  совместится с точкой  $M''$ .

При изменении последовательности отражений на  $УЗ_2 \rightarrow УЗ_1$  вначале на положение той же точки  $M$  воздействует  $УЗ_2$ , что вызовет, так же как и в первом случае, ее поворот на угол  $2\varphi_2$  вокруг  $\vec{e}_{3,4}$ . Далее, чтобы действие  $УЗ_1$  не сказывалось на дальнейшем преобразовании этой точки, необходимо вместе с ней повернуть и  $УЗ_1$  на тот же угол  $2\varphi_2$  вокруг орта  $\vec{e}_{3,4}$ . Если при последовательности  $УЗ_2 \rightarrow УЗ_1$  необходимо будет сохранить положение  $УЗ_1$  неизменным, то придется повернуть  $УЗ_4$  вокруг  $\vec{e}_{1,2}$  на  $2\varphi_1$ . Несколько иное доказательство приведено на рис. 52, б.

При преобразовании  $УЗ_1 \rightarrow УЗ_2$  точку  $M$   $УЗ_1$  не сместит, а  $УЗ_2$  с ребром  $\vec{e}_{3,4}$  переведет ее в точку  $M''$ . При обратной последовательности поворотов  $УЗ_2 \rightarrow УЗ_1$  надо, чтобы ребро  $\vec{e}_{3,4}$  заняло положение  $\vec{e}_{3,4}'$ , повернувшись на угол  $2\varphi_1$  вокруг ребра  $e_{1,2}$ . Тогда после воздействия  $УЗ_2$  точка  $M$  придет в положение  $M'$ , а  $УЗ_1$  далее совместит точку  $M'$  с точкой  $M''$ . Можно поступить еще так: не смещая ребро  $\vec{e}_{3,4}$ , сместить орт  $\vec{e}_{1,2}$ , повернув его вокруг орта  $\vec{e}_{3,4}$  на угол  $2\varphi_2$ , тогда орт  $e_{1,2}$  займет положение  $\vec{e}_{1,2}'$ , совмещенное с точкой  $M''$ . Теперь при последовательности  $УЗ_2 \rightarrow УЗ_1$  при воздействии  $УЗ_2$  точка  $M$  сразу перейдет в точку  $M''$ , совмещенную с ортом  $\vec{e}_{1,2}'$  и  $УЗ_1$  не окажет какого-либо действия на положение этой точки.

## КВАТЕРНИОНЫ И БИКВАТЕРНИОНЫ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА СИСТЕМ ПЛОСКИХ ЗЕРКАЛ

Применяющийся ранее метод расчета ЗПС с помощью сферической тригонометрии и векторно-матричный метод достаточно трудоемки, так как требуют для решения задачи пересчета операторов действия ЗПС из одной СК в другую. Более просто задачи такого типа решаются с помощью кватернионов без учета сдвига пространства и бикватернионов со сдвигом, в этих случаях задачи решаются в одной СК.

### 1. КВАТЕРНИОНЫ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА ЗЕРКАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Необходимость расширения трехмерной алгебры привела Гамильтона к введению алгебры для четырехмерных чисел — кватернионов (см. п. 5 гл. 1).

Сформулируем основные свойства кватернионов [1].

1. Кватернионы не характеризуют сдвигов в пространстве, хотя и могут применяться для получения положений не только свободных векторов, но и радиус-векторов. В последнем случае требуется находить последовательно расстояние ОЗ от начало СК или от проектируемой точки, но надобности в этом нет, так как более просто такая задача решается с помощью бикватернионов.

2. Если имеются два КВ—М и Λ и известна последовательность их действия, например вначале Λ, а затем М, то полностью заменяющий их действие КВ Γ получается с помощью кватернионного умножения

$$\Gamma = M \circ \Lambda.$$

3. Если ЗПС, действие которой выражается определенным КВ, сама вращается, то это значит, что вращается орт  $\vec{e}$  ЗС. Новое положение этого орта может быть получено по формуле Родрига

$$\vec{e}' = \vec{e} + \frac{1}{1 + \frac{1}{4} |\vec{\theta}|^2} \vec{\theta} \times \left( \vec{e} + \frac{1}{2} \vec{\theta} \times \vec{e} \right), \quad (155)$$

где  $\vec{\theta} = 2\vec{e} \operatorname{tg} \varphi$  — вектор конечного поворота с ортом  $\vec{e}$ , который в дальнейшем будем называть осью  $\vec{e}$ , на угол  $2\varphi$ , либо по формуле кватернионного вида

$$\vec{e}' = \Lambda \circ \vec{e} \circ \tilde{\Lambda},$$

где  $\Lambda$  — кватернион вращения без инверсии. При наличии инверсии знак у  $\vec{e}$  должен быть заменен на обратный.

Действие вращающейся ЗПС может быть описано КВ

$$\Lambda' = \cos \varphi + \vec{e}' \sin \varphi = \cos \varphi + (\Lambda \circ \vec{e} \circ \tilde{\Lambda}) \sin \varphi. \quad (156)$$

4. Операция вращения инвариантна относительно преобразования базисов системы координат, если векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{r}'$  и векторная часть КВ выражены в одной и той же СК.

5. При перестановке сомножителей в кватернионном произведении переставляется также их сопряженность, например

$$\vec{r}' = \Lambda_1 \vec{r} \tilde{\Lambda}_2 = \tilde{\Lambda}_2 \vec{r} \tilde{\Lambda}_1. \quad (157)$$

6. Полученный КВ расшифровывается по правилу: скалярная часть без инверсии представляет собой косинус половинного угла поворота пространства при наличии инверсии минус синус того же угла; коэффициент при векторной части — синус указанного угла без инверсии и косинус при наличии инверсии, а сама векторная часть — ось, вокруг которой осуществляется поворот.

Важным является понятие о сопряженном КВ. Сопряженным  $\tilde{\Lambda}$ , или обратным  $\Lambda^{-1}$  к данному единичному, называется КВ, у которого векторная часть имеет другой знак, т. е. если  $\Lambda = \lambda_0 + \vec{\lambda}$ , то

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda^{-1} = \lambda_0 - \vec{\lambda};$$

отсюда следует

$$\|\Lambda\| = \Lambda \circ \tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2. \quad (158)$$

Последнее выражение называется нормой КВ  $\Lambda$ . Если  $\|\Lambda\| = 1$ , то КВ является нормированным, или единичным. При ортогональном преобразовании пространства КВ всегда единичные.

Выражение (158) будет равно единице при

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos \varphi; \quad \lambda_1 = \cos \alpha \sin \varphi; \quad \lambda_2 = \cos \beta \sin \varphi; \\ \lambda_3 &= \cos \gamma \sin \varphi, \end{aligned}$$

где  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  — направляющие косинусы орта оси поворота.

Тогда для КВ  $\Lambda$  можно получить выражение (20), если положить  $\vec{\lambda} = \vec{e}$ :

$$\Lambda = \cos \varphi + \vec{\lambda} \sin \varphi. \quad (159)$$

Произведение кватернионов  $\Lambda \circ \Lambda = (\cos \varphi + \lambda \sin \varphi)^2 = \cos 2\varphi + \lambda \sin 2\varphi$ ; отсюда для любой степени  $m$  справедлива формула Му-арра

$$\Lambda^m = \cos m \varphi + \vec{\lambda} \sin m \varphi. \quad (160)$$

Из этих формул видно, что результатом произведения одинаковых КВ, т. е. с одинаковым положением осей, является КВ, угол поворота пространства которым равен сумме углов поворота пространства каждым исходным КВ.

Формулу (159) можно интерпретировать с помощью единичных векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  на единичной сфере (рис. 53), расположенных под углом  $\varphi$  один к другому в плоскости, перпендикулярной к  $\vec{\lambda}$ .

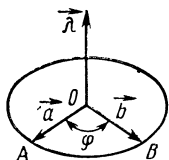


Рис. 53. Представление кватерниона в виде дуги окружности  $\cup AB$

Таким образом, кватерниону  $\Lambda$  можно поставить в соответствие дугу  $AB$  большого круга, а произведение КВ представить как векторную сумму соответствующих им дуг. Это является одной из интерпретаций КВ, который отличается от вектора тем, что представляется не прямолинейным отрезком, а дугой. Отметим еще один очень важный вопрос. Результатом действия двух КВ является КВ, который представляет собой произведение последовательности их действия. Если результатом действия двух или более векторов является вектор, представляющий собой геометрическую сумму исходных векторов, то для КВ надо геометрически просуммировать дуги больших кругов единичной сферы [1].

Для единичных КВ их алгебраическое суммирование, а также умножение (деление) на скаляр, которые производятся с их элементами, не может иметь места, так как тогда КВ перестанут быть единичными.

Алгебра кватернионов позволяет представить конечный поворот в пространстве (по образующей конуса) в простой и удобной форме. Такое представление базируется на следующей теореме [1], которую примем без доказательства. Пусть  $\Lambda$  и  $R$  — не скалярные кватернионы, в которых отсутствует скалярная часть. В этом случае

$$R' = \Lambda \circ R \circ \Lambda^{-1} = \Lambda \circ R \circ \tilde{\Lambda} \quad (161)$$

есть кватернион, норма и скалярная часть которого равны норме и скалярной части кватерниона  $R$ . Векторная часть  $R'$  получается вращением векторной части  $R$  по конусу  $\vec{\Lambda}$  вокруг оси вектора  $\vec{\Lambda}$  на двойной его угол. Так, если  $\Lambda = \cos\varphi + \vec{e}\sin\varphi$ , то векторная часть КВ  $R'$  получается вращением векторной части  $R$  вокруг оси  $\vec{e}$  на угол  $2\varphi$ .

Формулу (161) вида  $\Lambda \circ R \circ \tilde{\Lambda}$  можно рассматривать как оператор вращения, задаваемый кватернионом  $\Lambda$ , угол поворота в котором равен половине угла общего поворота пространства.

Полагая  $R = r_0 + \vec{r}$  и производя умножение, по формуле (19) получаем

$$R' = \Lambda \circ R \circ \tilde{\Lambda} = \Lambda \circ (r_0 + \vec{r}) \circ \tilde{\Lambda} = \Lambda \circ r_0 \circ \tilde{\Lambda} + \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda} = r_0 + \vec{r}'.$$

Таким образом, КВ воздействует только на векторную часть  $\vec{r}$ , скалярная часть  $r_0$  сохраняется неизменной, и, следовательно, исключая ее, можно написать

$$\vec{r}' = \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}. \quad (162a)$$

То же выражение для свободных векторов  $\vec{u}'$  и  $\vec{u}$  будет

$$\vec{u}' = \Lambda \circ \vec{u} \circ \tilde{\Lambda}. \quad (162б)$$

Кватернионы позволили получить замечательную формулу для угла поворота пространства и координат орта оси поворота, являющихся результатом сложения двух поворотов пространства вокруг пересекающихся осей. Для этого достаточно перемножить приведенные ниже кватернионы

$$M = \mu_0 + \mu_1 \vec{i}_1 + \mu_2 \vec{i}_2 + \mu_3 \vec{i}_3;$$

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \vec{i}_1 + \lambda_2 \vec{i}_2 + \lambda_3 \vec{i}_3$$

и результат представить как КВ, имеющий вид

$$\Gamma = \gamma_0 + \gamma_1 \vec{i}_1 + \gamma_2 \vec{i}_2 + \gamma_3 \vec{i}_3.$$

Если еще исключить гиперкомплексные числа  $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ , то определим так называемые параметры Родрига—Гамильтона

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \lambda_0 \mu_0 + \lambda_1 \mu_1 - \lambda_2 \mu_2 - \lambda_3 \mu_3; \\ \gamma_1 &= \lambda_0 \mu_1 + \lambda_1 \mu_0 + \lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2; \\ \gamma_2 &= \lambda_0 \mu_2 + \lambda_2 \mu_0 + \lambda_3 \mu_1 - \lambda_1 \mu_3; \\ \gamma_3 &= \lambda_0 \mu_3 + \lambda_3 \mu_0 + \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1, \end{aligned} \quad (163)$$

где  $\gamma_0 = \cos \varphi_{1,2}$ ;  $\varphi_{1,2}$  — половина угла поворота пространства, полученного в результате суммирования двух поворотов;  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  — проекции орта оси поворота на орты выбранной СК.

Формулами (163) удобно пользоваться при применении вычислительных машин, так как действие над параметрами легко запрограммировать. В результате получаются полные данные о положении оси поворота пространства [последние три формулы (163)] и угле поворота пространства [первая формула (163)].

## 2. ОПЕРАТОРЫ ДЕЙСТВИЯ ЗЕРКАЛЬНЫХ СИСТЕМ В КВАТЕРНИОННОМ ВИДЕ

**Одинокое зеркало.** В соответствии с выражением (159) получим кватернионный оператор действия ОЗ

$$\Lambda_{OЗ} = \cos \frac{\pi}{2} + \vec{n} \sin \frac{\pi}{2} = \vec{n}. \quad (164)$$

Поэтому вектор  $\vec{r}'$  согласно (162a) с учетом инверсии

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \Lambda_{OЗ} \circ (-\vec{r}) \circ \Lambda_{OЗ} = \vec{n} \circ (-\vec{r}) \circ (-\vec{n}) = \\ &= \vec{n} \circ (-\vec{r}\vec{n} + \vec{r} \times \vec{n}) = \vec{r} - 2\vec{n}(\vec{r}\vec{n}). \end{aligned} \quad (165)$$

Таким образом получено обычное векторное уравнение (59) для вектора преобразованного ОЗ без учета его сдвига. Для радиус-



вектора точки надо учитывать еще расстояние  $p$  от начала координат до плоскости ОЗ.

**Двойные зеркала.** На основании выражения (159) для кватерниона углового зеркала получим

$$\Lambda_{УЗ} = \vec{n}_2 \circ \vec{n}_1 = -\vec{n}_1 \vec{n}_2 + \vec{n}_2 \times \vec{n}_1 = \cos \varphi + \vec{e} \sin \varphi, \quad (166)$$

где  $\varphi$  — угол между зеркалами (угол между ортами нормалей  $n_1$

и  $n_2$  равен  $\pi - \varphi$ );  $\vec{e} = \frac{\vec{n}_2 \times \vec{n}_1}{|\vec{n}_2 \times \vec{n}_1|}$  — орт ребра УЗ.

Для отраженного луча получим формулу

$$\vec{u}' = \vec{n}_2 \circ \vec{n}_1 \circ \vec{u} \circ \vec{n}_1 \circ \vec{n}_2 = \Lambda_{УЗ} \circ \vec{u} \circ \tilde{\Lambda}_{УЗ}.$$

Сравнив ее с формулой (165), видим, что здесь вектор  $\vec{u}$  в отличие от вектора  $\vec{r}$  не имеет знака минус. Таким образом, при четном числе зеркал в ЗПС сопряжение КВ по формуле (165) сохраняется, и знак  $\vec{u}$  не меняется. Поэтому можно написать общее выражение для вектора  $\vec{u}_m$  при  $m$ -м числе зеркал в ЗПС в виде

$$\vec{u}_m' = \left( \prod_{s=2}^m \circ \Lambda_1 \right) \circ (-1)^m \vec{u} \circ \left( \prod_{s=2}^m \circ \Lambda_1 \right). \quad (167)$$

Следовательно, последовательность вращений  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_m$  эквивалентна одному вращению с оператором

$$\Lambda_{1m} = \Lambda_m \circ \Lambda_{m-1} \circ \dots \circ \Lambda_3 \circ \dots \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_1 = \prod_{s=2}^m \circ \Lambda_1.$$

Оператор *зеркального ромба* в кватернионном виде равен единице, так как он не поворачивает пространства, а только смещает его.

**Тройное зеркало.** Кватернион ТЗ существует только для зеркал с некопланарными нормальными, и для случая ОЗ  $\rightarrow$  УЗ имеем

$$\begin{aligned} \Lambda_{ТЗ} = \Lambda_{ОЗ, УЗ} &= \vec{n}_3 \circ \vec{n}_2 \circ \vec{n}_1 = \vec{n}_3 \circ \Lambda_{УЗ} = \vec{n}_3 \circ (-\vec{n}_1 \vec{n}_2 + \vec{n}_2 \times \vec{n}_1) = \\ &= -\vec{n}_3 (\vec{n}_1 \vec{n}_2) - \vec{n}_3 (\vec{n}_2 \times \vec{n}_1) + \vec{n}_3 \times (\vec{n}_2 \times \vec{n}_1) = \\ &= -\vec{n}_3 (\vec{n}_2 \times \vec{n}_1) - \vec{n}_3 (\vec{n}_1 \vec{n}_2) + \vec{n}_2 (\vec{n}_1 \vec{n}_3) - \vec{n}_1 (\vec{n}_2 \vec{n}_3) = \\ &= -\cos \gamma \sin \varphi_{1,2} + \vec{n}_3 \cos \varphi_{1,2} + \vec{n}_2 (\vec{n}_1 \vec{n}_3) - \vec{n}_1 (\vec{n}_2 \vec{n}_3), \quad (168) \end{aligned}$$

где  $\gamma$  — угол между ортом  $\vec{n}_3$  и ортом  $\vec{e}$  ребра УЗ;  $\varphi_{1,2}$  — угловой базис УЗ.

Таким образом получена векторная часть кватерниона  $\Lambda_{ТЗ}$ , разложенная по ортам  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  и  $\vec{n}_3$  трех исходных зеркал:

$$\Lambda_{ТЗ} = -\vec{n}_1 (\vec{n}_2 \vec{n}_3) + \vec{n}_2 (\vec{n}_1 \vec{n}_3) + \vec{n}_3 \cos \varphi_{1,2}.$$

Представляя этот КВ в каноническом виде, для которого  $\vec{n}_3$  и  $\vec{e}$  переходят  $\vec{n}_{3_3}$  и  $\vec{e}_3$ , причем  $\vec{n}_{3_3} = \vec{e}_3$ , а  $\vec{n}_1 \vec{n}_3 = \vec{n}_2 \vec{n}_3 = 0$ , из выражения (168) получим зависимость (99)

$$\Lambda_{T3_3} = -\sin \varphi_3 + \vec{n}_{3_3} \cos \varphi_3.$$

Иным путем эту же формулу можно получить из (168), положив, как этого требует каноническое представление ЗС,

$$\Lambda_{Y3} = \cos \varphi_3 + \vec{n}_{3_3} \sin \varphi_3;$$

тогда

$$\Lambda_{T3} = \vec{n}_{3_3} \circ (\cos \varphi_3 + \sin \varphi_3 \vec{n}_{3_3}) = -\sin \varphi_3 + \cos \varphi_3 \vec{n}_{3_3}.$$

Сравнивая выражение (166) при условии  $\varphi = \varphi_3$  и  $\vec{e} = \vec{n}_{3_3}$  с выражением (99) с учетом инверсии, видим, что скалярная часть первого кватерниона  $\cos \varphi_3$  превращается в  $-\sin \varphi_3$ , а коэффициент в векторной части вместо  $\sin \varphi_3$  становится равным  $\cos \varphi_3$ .

Угол  $\mu$  между оортами  $\vec{n}$  и  $\vec{e}_3$ , а также положение оорта  $\vec{e}_3 = \vec{n}_{3_3}$  определяются выражениями (95) и (102).

**Четверное зеркало.** Кватернион ЧЗ имеет вид

$$\begin{aligned} \Lambda_{Y3} &= \Lambda_{Y3_1, Y3_2} = \cos \varphi' + \vec{e}' \sin \varphi' = \vec{n}_4 \circ \vec{n}_3 \circ \vec{n}_2 \circ \vec{n}_1 = \\ &= N_{Y3_2} \circ N_{Y3_1} = \cos (\varphi_2 + \vec{e}_2 \sin \varphi_2) \circ (\cos \varphi_1 + \vec{e}_1 \sin \varphi_1) = \\ &= \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \vec{e}_1 \vec{e}_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \vec{e}_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \\ &\quad + \vec{e}_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 + \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad (169)$$

Следовательно,

$$\varphi' = \arccos (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \gamma \sin \varphi_1 \sin \varphi_2),$$

где  $\varphi'$  — половина угла поворота пространства, являющегося результатом двух поворотов  $Y3_1$  и  $Y3_2$ ;  $\gamma$  — угол между  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$ ;

$$\vec{e}' = \frac{\vec{e}_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \vec{e}_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 + \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2}{\sqrt{1 - (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \gamma \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)^2}}. \quad (170)$$

Это выражение можно значительно упростить, если разделить левую и правую части равенства на  $\cos \varphi_1 \cos \varphi_2$  и произвести замены  $\theta' = 2 \operatorname{ctg} \varphi'$ ,  $\theta_1 = 2 \operatorname{ctg} \varphi_1$  и  $\theta_2 = 2 \operatorname{ctg} \varphi_2$ , в результате получим известную формулу (17) Родрига—Гамильтона.

### 3. ПРИМЕНЕНИЕ КВАТЕРНИОНОВ

#### ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИИ РАДИУС-ВЕКТОРОВ ТОЧЕК

Перейдем к применению кватернионов не только для свободных векторов, как это делалось выше, но и для радиус-векторов точек.

В этом случае, помимо ортогонального однородного преобразования над векторами, встречаемся с преобразованием неоднородным: кроме поворотов, имеют место и сдвиги пространства. Для радиус-вектора имеем выражение

$$\vec{r}'_1 = \vec{n}_1 \circ (-\vec{r}_1) \circ (-\vec{n}_1) - 2p_1\vec{n}_1, \quad (171)$$

где  $\vec{n}_1$  — КВ одиночного зеркала ОЗ<sub>1</sub>;  $p_1$  — расстояние от ОЗ<sub>1</sub> до начала СК.

Радиус-вектор  $\vec{r}'_1$  в результате воздействия второго зеркала преобразуется в радиус-вектор

$$\begin{aligned} \vec{r}'_2 &= \vec{n}_2 \circ (-\vec{r}'_1) \circ (-\vec{n}_2) - 2p_2\vec{n}_2 = \\ &= \{\vec{n}_2 \circ -[\vec{n}_1 \circ (-\vec{r}_1) \circ (-\vec{n}_1) - 2p_1\vec{n}_1] \circ \vec{n}_2\} - 2p_2\vec{n}_2 = \\ &= \{\vec{n}_2 \circ -[\vec{r}_1 - 2\vec{n}_1(\vec{r}_1\vec{n}_1) - 2p_1\vec{n}_1] \circ \vec{n}_2\} - 2p_2\vec{n}_2. \end{aligned} \quad (172)$$

Аналогично эту формулу можно распространить на третьи и последующие зеркала, сколь бы много их не было.

Формулы (171) и (172) имеют кватернионный вид, хотя относятся не к свободным векторам, а к радиус-векторам. Надо отметить громоздкость формул и известную их искусственность, так как неоднородные преобразования, связанные со сдвигами пространства, не свойственны кватернионам, в этом отношении они уступают бикватернионам.

#### 4. ОБЩИЕ СВОЙСТВА БИКВАТЕРНИОНОВ

При рассмотрении действия КВ было установлено, что их применение удобно для параллельного хода лучей (операции со свободными векторами) или для сходящегося хода лучей (операции с радиус-векторами), но только при вращении в пространстве. При учете поступательного сдвига пространства формулы в кватернионном виде делаются громоздкими. Поэтому целесообразно перейти к исчислению, при котором одновременно с поворотом пространства учитывался бы и его сдвиг. Таким исчислением являются винтовое исчисление и алгебра бикватернионов. Теория винтов возникла в начале прошлого столетия как чисто геометрическая теория после появления работ Пуансо, Шаля и Мебнуса, в которых была установлена эквивалентность произвольного перемещения тела винтовому перемещению. Эти работы в дальнейшем получили развитие в трудах Плюккера, Р. Болла, выпустившего в 1874 г. капитальный труд [30]. За несколько лет до этого В. Клиффорд [35] дал интересное описание винтов с помощью комплексных чисел, он ввел особый множитель  $\omega$ , квадрат которого равен нулю, и составил БК сумму из двух КВ, из которых второй умножается на  $\omega$ . С помощью БК можно описать винтовое движение тела. Следует отметить, что векторное исчисление в то время только начало развиваться и еще не приняло той простой и разветвленной формы, которую оно имеет теперь.

До последнего времени винтовое исчисление использовалось только для описания кинематики и динамики твердого тела, а также при исследовании пространственных механизмов [10]. Замеча-

тельным свойством винтов и БК является то, что они не требуют пересчета систем координат; этим значительно упрощаются вычисления. Формально между винтовым исчислением и алгеброй БК нет принципиального различия. Однако в методах расчета имеется существенная разница, заключающаяся в том, что в БК используется кватернионное умножение, а в винтовом исчислении формулы теории конечного поворота твердого тела. Если КВ начали применять в расчетах оптических систем с начала 70-х годов настоящего века, то введение БК началось с 1977 г. с появлением работ [5 и 6].

В БК используются введенные Клиффордом дуальные числа, составленные по типу обычных комплексных чисел:

$$\lambda_k = a_k + b_k \omega, \quad (173)$$

где  $a_k$  и  $b_k$  — действительные числа;  $\omega$  — символ Клиффорда.

Если числа  $\lambda_k$  ( $k=0, 1, 2, 3$ ) в кватернионе  $\Lambda$  [см. (18)] считать не действительными, а дуальными числами, то кватернион  $\Lambda$  превращается в БК

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda} &= (a_0 + b_0 \omega) + (a_1 + b_1 \omega) \vec{i}_1 + (a_2 + b_2 \omega) \vec{i}_2 + \\ &+ (a_3 + b_3 \omega) \vec{i}_3 = \lambda'_0 + \lambda'_1 \vec{i}_1 + \lambda'_2 \vec{i}_2 + \lambda'_3 \vec{i}_3 = \lambda'_0 + \vec{\lambda} \lambda', \end{aligned} \quad (174)$$

где  $\vec{\lambda} = \sum_{k=1}^3 (a_k + b_k \omega) \vec{i}_k$  — бивектор, или комплексный вектор, яв-

ляющийся суммой вектора  $\vec{\lambda}$  (оси поворота) и вектора  $\vec{\lambda}_\omega^0$ , характеризующего положения вектора  $\vec{\lambda}$ . Первый член  $\lambda'_0$ , оставаясь скалярным, так же как и в кватернионе  $\bar{\Lambda}$ , характеризует поворот пространства  $a_0$  и сдвиг пространства  $b_0$ . Второй член  $\vec{\lambda} \lambda'$  характеризует винтовое преобразование пространства — направление  $\vec{\lambda}$  оси поворота пространства (оси винта) и его положение  $\vec{\lambda}_\omega^0$  относительно начала системы координат. Формула умножения двух бикватернионов  $\bar{\Lambda} (\lambda'_0 \vec{\lambda})$  и  $\bar{M} (\mu'_0 \vec{\mu})$  имеет тот же вид, что и для КВ:

$$\bar{\Lambda} \circ \bar{M} = \lambda'_0 \mu'_0 + \lambda'_0 \vec{\mu} + \mu'_0 \vec{\lambda} - \vec{\lambda} \vec{\mu} + \vec{\lambda} \times \vec{\mu}, \quad (175)$$

где  $\vec{\lambda} \vec{\mu}$  и  $\vec{\lambda} \times \vec{\mu}$  — скалярное и векторное произведения бивекторов (комплексных векторов  $\vec{\lambda}$  и  $\vec{\mu}$  соответственно).

Для бикватернионов  $\bar{\Lambda}$  введем сопряжения двух типов: обычное, применяющееся в КВ, и дуальное. Сопряженным бикватерниону  $\bar{\Lambda} = \lambda'_0 + \vec{\lambda}$  в обычном смысле назовем бикватернион  $\bar{\bar{\Lambda}} = \lambda_0 - \vec{\lambda}$ .

Дуально-сопряженным бикватернионом  $\bar{\Lambda}$  с дуальными числами  $\lambda_k$  назовем бикватернион  $\bar{\bar{\Lambda}}$ , у которого дуальные числа имеют член, содержащий символ  $\omega$  с обратным знаком —  $\lambda_k = a_k - b_k \omega$ .

Модуль, или норма бикватерниона  $\bar{\Lambda}$ , определяется по аналогии с модулем кватерниона  $\Lambda$  [1] введением дуального сопряжения

$$\|\bar{\Lambda}\| = \bar{\Lambda} \circ \tilde{\Lambda} = \lambda_0'^2 + \lambda_1'^2 + \lambda_2'^2 + \lambda_3'^2. \quad (176)$$

## 5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА С ПОМОЩЬЮ БИКВАТЕРНИОНОВ

Для описания движения в трехмерном пространстве достаточно ограничиться нормированными бикватернионами с единичным модулем  $\|\bar{\Lambda}\| = 1$  и использовать их тригонометрическую форму

$$\bar{\Lambda} = \cos \Phi + \vec{\lambda} \sin \Phi, \quad (177)$$

где  $\Phi = \varphi + \omega\varphi^0$  — комплексный угол поворота; его действительная часть  $\varphi$  равна половинному углу поворота вокруг оси винта  $\vec{\lambda}$ , а второй сомножитель мнимой части равен половине значения поступательного перемещения вдоль оси винта;  $\vec{\lambda} = \vec{\lambda} + \omega\vec{\lambda}^0$ .

Комплексный вектор  $\vec{\lambda}$  (рис. 54) определяет направление оси винта (или оси комплексного угла  $\vec{\lambda}$ ), а его второй сомножитель мнимой части  $\vec{\lambda}^0$  — положение оси винта в пространстве:

$$\vec{\lambda}^0 = \vec{r}^0 \times \vec{\lambda}, \quad (178)$$

где  $\vec{r}^0 = \vec{\lambda} \times \vec{\lambda}^0$  — вектор сдвига пространства из начала координат до оси винта перпендикулярно к этой оси.

Общее выражение бикватерниона  $\bar{\Lambda}$  из (177) и (178) будет иметь вид

$$\bar{\Lambda} = \cos(\varphi + \omega\varphi^0) + \sin(\varphi + \omega\varphi^0)(\vec{\lambda} + \omega\vec{r}^0 \times \vec{\lambda}). \quad (179)$$

Для нормированных БК обратный бикватернион  $\bar{\Lambda}^{-1}$  совпадает с сопряженным  $\tilde{\Lambda}$ :

$$\bar{\Lambda}^{-1} = \tilde{\Lambda} = \cos \Phi - \vec{\lambda} \sin \Phi. \quad (180)$$

Переход к сопряженному БК соответствует изменению знака всей векторной части — изменению направления винтового движения на противоположное, но с сохранением конгруэнтности (правый винт остается правым, а левый — левым).

Переход к дуально-сопряженному бикватерниону  $\tilde{\Lambda}$  соответствует замене правого винта левым, и наоборот. Для дальнейшего полезны

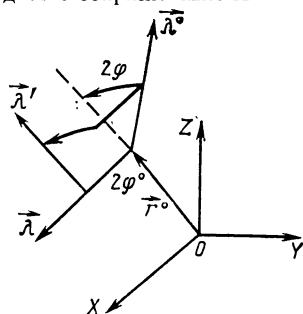


Рис. 54. Схематическое действие бикватерниона

следующие формулы тригонометрии комплексных углов, которые получены путем разложения в соответствующие тригонометрические ряды  $\cos \Phi$  и  $\sin \Phi$  [10]:

$$\cos \Phi \doteq \cos \varphi - \omega \varphi^0 \sin \varphi; \quad (181)$$

$$\sin \varphi = \sin \varphi + \omega \varphi^0 \cos \varphi.$$

Точки пространства и их радиус-векторы в алгебре бикватернионов также представляются БК. Если  $\vec{r}$  — радиус-вектор произвольной, но фиксированной в системе координат точки  $M$ , то эта точка представляется бикватернионом  $\bar{R}$ , описывающим сдвиг из начала вектора  $\vec{r}$  в его конец  $M$ . Итак, сдвиг происходит в направлении вектора  $\vec{r}$  на величину  $\vec{r}=|\vec{r}|$ , что эквивалентно повороту на комплексный угол  $\Phi = 0 + \omega r$  вокруг оси, определяемой единичным вектором  $\vec{\lambda} = \frac{\vec{r}}{r}$ . По формулам (179) и (181), положив  $\bar{\Lambda} = \bar{R}$ , получим

$$\bar{R} = \cos(0 + \omega r) + \frac{\vec{r}}{r} \sin(0 + \omega r) = 1 + \omega \vec{r}. \quad (182)$$

В формуле (182) использовано то, что начало координат расположено на оси винта, т. е.  $\vec{r}^0 = \vec{\lambda}^0 = 0$ . Перевод радиус-вектора  $\vec{r}$ , соответствующего БК  $\bar{R} = 1 + \omega \vec{r}$ , в радиус-вектор  $r'$ , соответствующий бикватерниону  $\bar{R}' = 1 + \omega \vec{r}'$ , производится по формуле

$$\bar{R}' = 1 + \omega \vec{r}' = \bar{\Lambda} \circ \bar{R} \circ \bar{\Lambda}^{-1} = \bar{\Lambda} \circ (1 + \omega \vec{r}) \circ \bar{\Lambda}. \quad (183)$$

Применительно к расчету систем плоских зеркал формула (183) соответствует их четному числу; при нечетном числе — наличии инверсии — необходимо ввести еще дуальное сопряжение в бикватернион  $\bar{R}$  [см. выражение (31)].

Рассмотрим далее применение БК к расчету простейших систем плоских зеркал. Обратим внимание на одно важное свойство. В бикватернион  $\bar{\Lambda}$ , являющийся оператором преобразования пространства, входят параметры: угол поворота пространства и сдвиг вдоль оси поворота — в половинном значении, в то время как в бикватернионы  $\bar{R}$  и  $\bar{R}'$ , являющиеся характеристиками положения точек, входят сдвиги и углы поворота в полном значении. Это объясняется тем, что построение оператора БК основывается на симметричной схеме преобразования пространства относительно некоторой плоскости симметрии, делящей угол поворота и сдвиг на две равные части. Это же обстоятельство подтверждается тем, что в формулу (183) оператор  $\bar{\Lambda}$  входит дважды — слева и справа от преобразуемого бикватерниона  $\bar{R}$ . Правый бикватернион  $\bar{\Lambda}$  как бы переводит бикватернион  $\bar{R}$  в новую СК по типу матричных операторов [см. выражение (74)], а левый БК возвращает  $\bar{R}$  в исходную СК.

## 6. ОПЕРАТОР ДЕЙСТВИЯ ОДИНОЧНОГО ЗЕРКАЛА В БИКВАТЕРНИОННОМ ВИДЕ

Действие одиночного зеркала по преобразованию им пространства в наиболее общем виде показано на рис. 18. Оператор преобразования пространства в векторном виде представлен формулой (59), в матричном виде — формулой (63). Найдем оператор действия одиночного зеркала в бикватернионном виде.

Инверсия  $\vec{r}$  относительно точки  $O$  (см. рис. 18, а) описывается дуальным сопряжением в формуле преобразования (31), так как замена  $\vec{r} \rightarrow \vec{r}^*$  соответствует замене  $\vec{R} \rightarrow -\vec{R}$ . Два других элементарных преобразования выражаются комплексным углом

$$2\Phi = \pi + \omega 2p, \quad (184)$$

т. е. поворотом вектора  $-\vec{r}$  вокруг оси  $\vec{n}$  на угол  $\pi$  и сдвигом вдоль оси  $\vec{n}$  на  $2p$ .

В соответствии с формулами (180) и (181) оператор действия одиночного зеркала (будем обозначать эти операторы  $\bar{\Lambda}$  с соответствующим индексом представляется бикватернионом

$$\bar{\Lambda}_{O_3} = \cos(\pi/2 + \omega p) + \vec{n} \sin(\pi/2 + \omega p) = -\omega p + \vec{n}. \quad (185)$$

Сравнивая полученный оператор с оператором кватернионного вида — выражением (164), видим, что в нем отсутствует член  $-\omega p$ . В соответствии с формулой (183) преобразование радиус-вектора  $\vec{r}$  одиночным зеркалом выражается так:

$$\begin{aligned} \vec{R}' &= 1 + \omega \vec{r} = (-\omega p + \vec{n}) \circ (1 - \omega \vec{r}) \circ (\omega p - \vec{n}) = \\ &= 1 + \omega [\vec{r} - 2\vec{n}(\vec{n} \vec{r}) + 2p\vec{n}]. \end{aligned} \quad (186)$$

Приравнявая векторные части, получим известное выражение (165) действия зеркала в векторной форме.

## 7. ОПЕРАТОРЫ ДЕЙСТВИЯ УГЛОВОГО ЗЕРКАЛА И ЗЕРКАЛЬНОГО РОМБА В БИКВАТЕРНИОННОМ ВИДЕ

Пусть имеется система из двух зеркал 1 и 2:  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$  — единичные векторы нормалей;  $p_1$  и  $p_2$  — расстояния зеркал от начала координат. Тогда действие зеркал 1 и 2 описывается бикватернионном виде (186)

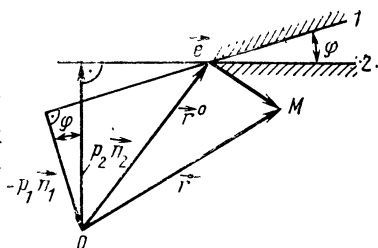
$$\bar{\Lambda}_{O_3 1} = -\omega p_1 + \vec{n}_1; \quad \bar{\Lambda}_{O_3 2} = -\omega p_2 + \vec{n}_2.$$

Формулы для отражения от зеркал 1 и 2 в соответствии с выражением (31) будут иметь вид

$$\vec{R}' = \bar{\Lambda}_{O_3 1} \circ \vec{R} \circ \vec{\Lambda}_{O_3 1}; \quad \vec{R}'' = \bar{\Lambda}_{O_3 2} \circ \vec{R}' \circ \vec{\Lambda}_{O_3 2}.$$

Для бикватерниона  $\vec{R}''$ , учитывая, что  $\vec{R}' = \bar{\Lambda}_{O_3 1} \circ \vec{R} \circ \vec{\Lambda}_{O_3 1}$ ,

Рис. 55. Представление сдвига ребра  $\vec{e}$  УЗ относительно начала системы координат векторами  $p_1\vec{n}_1$  и  $p_2\vec{n}_2$



получим

$$\begin{aligned}\bar{R}'' &= \bar{\Lambda}_{Oz_2} \circ \bar{\Lambda}_{Oz_1} \circ \bar{R} \circ \bar{\Lambda}_{Oz_1} \circ \bar{\Lambda}_{Oz_2} = (\bar{\Lambda}_{Oz_2} \circ \bar{\Lambda}_{Oz_1}) \circ \\ &\circ \bar{R} \circ (\bar{\Lambda}_{Oz_2} \circ \bar{\Lambda}_{Oz_1}) = \bar{\Lambda}_{y3} \circ \bar{R} \circ \bar{\Lambda}_{y3}.\end{aligned}\quad (137)$$

Для бикватерниона  $\bar{\Lambda}_{y3} = \bar{\Lambda}_{Oz_2} \circ \bar{\Lambda}_{Oz_1}$  с учетом формулы (133) и рис. 55 получим

$$\begin{aligned}\bar{\Lambda}_{y3} &= (-\omega\vec{p}_2 + \vec{n}_2) \circ (\omega\vec{p}_1 + \vec{n}_1) = -\vec{n}_1\vec{n}_2 + \vec{n}_2 \times \vec{n}_1 + \\ &+ \omega(p_2\vec{n}_2 - p_1\vec{n}_1).\end{aligned}\quad (188)$$

По формуле (179) для того же бикватерниона  $\bar{\Lambda}_{y3}$  имеем

$$\bar{\Lambda}_{y3} = \cos \varphi + \vec{e} \sin \varphi = \cos \varphi + \vec{e} \sin \varphi + \omega(\vec{r}^0 \times \vec{e}) \sin \varphi, \quad (189)$$

где  $\vec{e} = \vec{e} + (\vec{r}^0 \times \vec{e}) \omega$ .

Поэтому из двух последних выражений получим

$$\vec{r}^0 \times \vec{e} \sin \varphi = p_1\vec{n}_2 - p_2\vec{n}_1. \quad (190a)$$

Умножая векторно левую и правую части последнего равенства на  $\vec{e} \sin \varphi = \vec{n}_2 \times \vec{n}_1$ , находим

$$\vec{r}^0 = \frac{\vec{n}_1(p_1 - p_2 \cos \varphi) + \vec{n}_2(p_2 - p_1 \cos \varphi)}{\sin^2 \varphi}. \quad (190b)$$

Из выражения (189) с учетом (190b) получим еще одно выражение для  $\bar{\Lambda}_{y3}$ :

$$\begin{aligned}\bar{\Lambda}_{y3} &= \cos \varphi + \vec{e} \sin \varphi + \frac{\omega}{\sin \varphi} [(\vec{n}_1 \times \vec{e})(p_1 + p_2 \cos \varphi) + \\ &+ (\vec{n}_2 \times \vec{e})(p_2 - p_1 \cos \varphi)].\end{aligned}\quad (191)$$

Используя (187) и (188) и произведя некоторые преобразования, получим выражение для радиус-вектора

$$\vec{r}'' = \vec{r}^0 + (\vec{r} - \vec{r}^0) \cos 2\varphi + \vec{e}[\vec{e}(\vec{r} - \vec{r}^0)](1 - \cos 2\varphi) +$$



$$+ \sin 2\varphi [\vec{e} \times (\vec{r} - \vec{r}^0)].$$

Если положить  $\vec{r} - \vec{r}^0 = \vec{r}_1$  и  $\vec{r}'' - \vec{r}^0 = \vec{r}_1''$ , то придем к формуле (148).

Для ЗР зеркала 1 и 2 параллельны и  $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$ . Бикватернион, соответствующий ЗР с учетом (186), имеет вид

$$\bar{\Lambda}_{3P} = \bar{\Lambda}_{OZ_2} \circ \bar{\Lambda}_{OZ_1} = (-\omega p_2 - \vec{n}_1) \circ (\omega p_1 + \vec{n}_1) = 1 + \omega b \vec{n}_1, \quad (192)$$

где  $b = p_2 - p_1$  — линейный базис ЗР.

Приравняв формулу (177) к бикватерниону  $\bar{\Lambda}_{3P}$ , соответственно положив  $\vec{\lambda} = \vec{n}_1$ ,  $\Phi = \varphi + \omega \varphi^0 = 0 + \omega b = \omega b$ , получим

$$\bar{\Lambda}_{3P} = \cos \omega b + \vec{n}_1 \sin \omega b. \quad (193)$$

Подстановка выражения (193) в (184) дает

$$\bar{R}' = \bar{\Lambda}_{3P} \circ \bar{R} \circ \bar{\Lambda}_{3P} = \bar{\Lambda}_{3P} \circ \bar{R} \circ \bar{\Lambda}_{3P}.$$

Это приводит к векторной формуле

$$\vec{r}'' = \vec{r} + 2b\vec{n}_1.$$

## 8. ОПЕРАТОР ДЕЙСТВИЯ ТРОЙНОГО ЗЕРКАЛА В БИКВАТЕРНИОННОМ ВИДЕ

Тройное зеркало с некопланарными нормальными было рассмотрено в п. 3 гл. 3, теперь перейдем к тройному зеркалу с компланарными нормальными. Такая ЗС, как известно, всегда может быть приведена к ОЗ и ЗР, поэтому БК такой ЗС

$$\bar{\Lambda}_{3P_{03}} = \bar{\Lambda}_{OZ_3} \circ \bar{\Lambda}_{OZ_2} \circ \bar{\Lambda}_{OZ_1} = \bar{\Lambda}_{OZ_3} \circ \bar{\Lambda}_{3P}. \quad (194a)$$

Принимая во внимание выражения (186) и (192), получим

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_{3P, OZ} &= (-\omega p_3 + \vec{n}_3) \circ (1 - \omega b \vec{n}_1) = -\omega p_3 + \vec{n}_3 + \\ &+ \omega b (\vec{n}_3 \vec{n}_1 - \vec{n}_3 \times \vec{n}_1) = \bar{\Lambda}_{OZ_3} - \omega b \bar{\Lambda}_{UZ_{1,3}}, \end{aligned} \quad (194b)$$

где  $\bar{\Lambda}_{UZ_{1,3}}$  — кватернион  $UZ_{1,3}$ .

Исследование этого выражения показывает, что оно упрощается, если  $\vec{n}_3 \cdot \vec{n}_1 = 0$ , т. е. ЗР перпендикулярен к ОЗ, и учесть, что  $p_3$  перейдет в  $p'_3$ , а  $b$  (базис ЗР) — в  $b'$ . Угол поворота ЗР при этом преобразовании равен  $\pi/2 - \varphi$  (рис. 56). Приравняв в выражении (194b) до и после преобразования скалярные части, получаем выражение для  $p'_3$ ; векторные части — выражение для  $b'$ . Этими выраже-

ниями оказываются уже ранее полученные равенства (126) и (127), в которых  $p_3$  обозначено  $p_0$ , а  $b'$  обозначено  $b_0$ .

Остановимся на перестановках последовательности действия одиночного зеркала и зеркального ромба и получим соответствующие формулы, используя преобразования бикватернионов.

Оператор действия системы из трех зеркал, в котором зеркала 1 и 2 образуют ЗР, определяется из выражения (1946).

Переставляя ОЗ и ЗР, получим

$$\begin{aligned}\bar{L}_{ЗР, ОЗ} &= \bar{L}_{ОЗ_2} \circ \bar{L}_{ОЗ_1} \circ \bar{L}'_{ОЗ_3} = (1 + \omega b \vec{n}_1) \circ (-\omega p'_3 + \vec{n}_3) = \\ &= -\omega p'_3 + \vec{n}_3 - \omega b (\vec{n}_3 \cdot \vec{n}_1) + \omega b \vec{n}_1 \times \vec{n}_3.\end{aligned}$$

Из условия равенства скалярных частей в последнем выражении и выражении (1946) определяется параметр  $p_3$ , который в равенстве (119) обозначен  $p_1$ .

Второе решение получается, если сохранить неизменным  $p_3$  и изменить  $\vec{n}_1$  на  $\vec{n}'_1$ , тогда новое положение нормали ЗР составит угол  $\pi - \varphi$  с  $\vec{n}_3$ , т. е. ЗР повернется на угол  $180^\circ - 2\varphi$  против часовой стрелки.

## 9. БИКВАТЕРНИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ ДЕЙСТВИЯ ЧЕТВЕРНЫХ ЗЕРКАЛ

Система, состоящая из углового зеркала и зеркального ромба. Пусть в ЗС зеркала 1 и 2 образуют УЗ, а зеркала 3 и 4 — ЗР. Оператор действия этой системы

$$\bar{L}_{ЗР, УЗ} = \bar{L}_{ОЗ_4} \circ \bar{L}_{ОЗ_3} \circ \bar{L}_{ОЗ_2} \circ \bar{L}_{ОЗ_1} = \bar{L}_{ЗР} \circ \bar{L}_{УЗ}, \quad (195)$$

где  $\bar{L}_{ЗР} = \bar{L}_{ОЗ_4} \circ \bar{L}_{ОЗ_3} = 1 + \omega b \vec{n}_3$ ;

$$\bar{L}_{УЗ} = \bar{L}_{ОЗ_2} \circ \bar{L}_{ОЗ_1} = \cos \varphi + \vec{e} \sin \varphi + \omega (\vec{r}^0 \times \vec{e}) \sin \varphi,$$

$\vec{n}_3$  — орт нормали;  $b$  — линейный базис ЗР;  $\vec{e}$  — орт ребра УЗ;  $\varphi$  — угловой базис УЗ;  $\vec{r}^0$  — радиус-вектор точки на ребре УЗ, перпендикулярный к ребру.

Приведем систему к инвариантному виду, когда нормаль к зеркальному ребру будет совмещена с ребром углового зеркала, для чего приравняем БК данной системы и преобразованной, тогда получим

$$\bar{L}'_{ЗР, УЗ} = \bar{L}'_{ЗР} \circ \bar{L}'_{УЗ}, \quad (196)$$

где  $\bar{L}'_{ЗР} = 1 + \omega b' \vec{e}$ ;

$$\bar{L}'_{УЗ} = \cos \varphi + \vec{e} \sin \varphi + \omega (\vec{r}^0 \times \vec{e}) \sin \varphi.$$

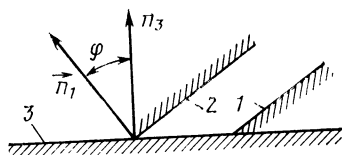


Рис. 56. Определение кватернионного вида оператора действия тройного зеркала

Приравняв равенства (195) и (196) и положив угол между  $\vec{n}_3$  и  $\vec{e}$  равным  $\psi$ , получим выражение

$$\vec{r}^{0'} = \vec{r}^0 + b [\vec{n}_3 - \vec{e} \cos \psi + \text{ctg } \varphi (\vec{e} \times \vec{n}_3)]. \quad (197)$$

Инвариантная форма оператора  $\bar{\Lambda}_{3P, U3}$  имеет вид

$$\bar{\Lambda}'_{3P, U3} = \cos(\varphi + \omega b') + (\vec{e} + \omega \vec{r}^{0'} \times \vec{e}) \sin(\varphi + \omega b'). \quad (198)$$

Теперь легко определить действие системы: поворот пространства вокруг ребра  $\vec{e}$  на угол  $2\varphi$ , сдвиг вдоль него на  $2b'$  и в результате поворота пространства сдвиг, перпендикулярный ребру, на вектор  $2\vec{r}^{0'}$ .

Система, состоящая из двух угловых зеркал. Эта система, как указывалось в п. 3 гл. 4, имеет два варианта: ребра УЗ пересекаются и ребра УЗ скрещиваются. При пересекающихся ребрах задача решается с помощью КВ (см. п. 1 гл. 4). Рассмотрим случай скрещивающихся ребер УЗ.

Используя свойство инвариантности УЗ к повороту вокруг его ребра (см. п. 9 гл. 2) и приводя ЗС в положение, при котором  $\vec{n}_2 = -\vec{n}_3$  (см. рис. 41), получим систему, состоящую из УЗ и ЗР. Оператор действия четырехзеркальной системы представляется произведением бикватернионов

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_{U3_1, U3_2} &= \bar{\Lambda}_{U3_2} \circ \bar{\Lambda}_{U3_1} = \bar{\Lambda}_{O3_4} \circ \bar{\Lambda}_{O3_1} \circ \bar{\Lambda}_{O3_2} \circ \bar{\Lambda}_{O3_1} = \\ &= \bar{\Lambda}_{O3_4} \circ (\bar{\Lambda}_{O3_2} \circ \bar{\Lambda}_{O3_1}) \circ \bar{\Lambda}_{O3_1} = \bar{\Lambda}_{O3_4} \circ \bar{\Lambda}_{3P} \circ \bar{\Lambda}_{O3_1}. \end{aligned} \quad (199)$$

Применив правило перестановки последовательности действия ЗР и ОЗ из п. 8 данной главы, получим

$$\bar{\Lambda}_{U3_1, U3_2} = \bar{\Lambda}_{3P} \circ \bar{\Lambda}'_{O3_4} \circ \bar{\Lambda}_{O3_1} = \bar{\Lambda}_{3P} \circ \bar{\Lambda}_{U3_3},$$

где  $\bar{\Lambda}'_{O3_4} = -\omega p'_4 + \vec{n}_4$ , причем  $p'_4 = p_4 - 2b(\vec{n}_4 \cdot \vec{n}_2)$ .

Бикватернион эквивалентного УЗ, составленного из УЗ<sub>1</sub> и УЗ<sub>2</sub>,

$$\bar{\Lambda}_{U3_3} = \cos \varphi_3 + \vec{e} \sin \varphi_3 + \omega (\vec{r}^0 \times \vec{e}) \sin \varphi_3, \quad (200)$$

где согласно выражению (190б) с учетом замены  $p_2 = p'_4$

$$\vec{r}^0 = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \{n_1 [p_1 - p'_4 (\vec{n}_4 \vec{n}_1)] + \vec{n}_4 [p'_4 - p_1 (\vec{n}_4 \vec{n}_1)]\}. \quad (201)$$

Заметим, что при преобразовании ОЗ<sub>4</sub> было сдвинуто на  $2b\vec{n}_4 \cdot \vec{n}_2$  и система двух УЗ привелась к эквивалентной системе из УЗ и ЗР.

Полученные выше формулы для вычисления операторов действия ЗПС в бикватернионном виде можно распространить на любое число зеркал в системе.

## 10. СИНТЕЗ СИСТЕМ ПЛОСКИХ ЗЕРКАЛ С ПРИМЕНЕНИЕМ БИКВАТЕРНИОНОВ

Ранее рассматривались только прямые задачи — дана ЗПС, найти положение изображения точки.

Рассмотрим решение обратной задачи: по заданным положениям предмета и изображения найти ЗПС и ее положение как в параллельном, так и в сходящемся ходе лучей.

Такая задача с применением векторно-матричного метода для системы из трех плоских зеркал и только для параллельного хода лучей рассмотрена в работе [32], причем решение дано не в канонической форме и поэтому содержит произвольные параметры.

Определим на основе метода бикватернионов оператор действия ЗПС, переводящий одну тройку векторов с фиксированным началом в другую также с фиксированным началом.

Пусть задана тройка векторов  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , связанная с предметом, и ее начало  $O$ , а также тройка векторов  $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ , связанная с изображением, и ее начало  $O'$ . Тройку  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  считаем всегда правой, а тройку  $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$  правой или левой в зависимости от условий.

В соответствии с ранее изложенным здесь используются следующие положения. Каждой точке пространства с радиус-вектором  $\vec{r}$  соответствует бикватернион  $\bar{R}=1+\omega\vec{r}$ , а началу  $O$  системы координат сопоставлен бикватернион  $\bar{\Lambda}_0=1$ .

Соответствующие преобразования свободного вектора  $\vec{n}$  для систем без оборачивания (при четном числе зеркал) и с оборачиванием (при нечетном числе зеркал) имеют соответственно вид

$$\omega\vec{n}' = \Lambda \circ \omega\vec{n} \circ \tilde{\Lambda}; \quad (202)$$

$$\omega\vec{n}' = \Lambda \circ (-\omega\vec{n}) \circ \tilde{\Lambda}. \quad (203)$$

Искомое преобразование пространства  $\bar{\Lambda}$  удовлетворяет двум независимым условиям. Первое условие для сдвига

$$\bar{R}'_0 = 1 + \omega\vec{OO}' = \bar{\Lambda} \circ 1 \circ \tilde{\Lambda}, \quad (204)$$

где  $\bar{\Lambda} = 1 + \omega \frac{1}{2} \vec{r}$ ;  $\bar{R}'_0 = \left(1 + \omega \frac{1}{2} \vec{r}\right) \circ \left(1 + \omega \frac{1}{2} \vec{r}\right) = 1 + \omega \vec{r}$ ,

означает, что начало  $O$  тройки  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  переходит в начало  $O'$  тройки  $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ .

Второе условие для поворота:

а) преобразованное пространство конгруэнтно исходному

$$\omega\vec{i}' = \bar{\Lambda} \circ \omega\vec{i} \circ \tilde{\Lambda}; \quad (205)$$

$$\omega\vec{j}' = \bar{\Lambda} \circ \omega\vec{j} \circ \tilde{\Lambda}.$$



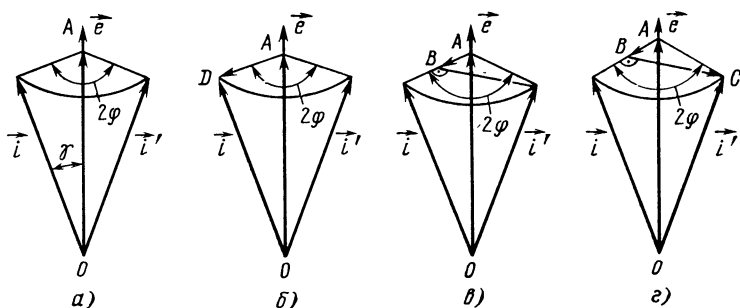


Рис. 58. Общая векторная интерпретация с помощью бикватернионов синтеза ЗПС при повороте пространства:

$a$  — составляющая вдоль оси поворота  $\vec{e}$  ( $e\vec{i}$ );  $b$  — составляющая, перпендикулярная к оси поворота;  $e$  — составляющая того же направления, что и в п. б, но со значением  $[\vec{i} - \vec{e}(e\vec{i})] \cos 2\varphi$ ;  $z$  — составляющая, перпендикулярная к вектору  $\vec{i} - \vec{e}(e\vec{i})$

Вектор  $\overline{BA}$  находится в плоскости чертежа, а  $\overline{AO'}$  в плоскости, к ней перпендикулярной (точка  $O'$  показана условно). Верхняя формула (209) для орта  $\vec{i}'$ , так же как и нижняя для орта  $\vec{j}'$ , поясняется рис. 58, г. На этом рисунке из векторного четырехугольника  $OABC$  орт

$$\vec{i}' = [\vec{i} - \vec{e}(\vec{e}\vec{i})] \cos 2\varphi + \vec{e}(\vec{e}\vec{i}) + \vec{e} \times \vec{i} \sin 2\varphi,$$

что в несколько ином виде дает формулу (209). На рис. 58 показаны последовательно преобразования:

составляющей вдоль оси поворота (рис. 58, а)

$$\vec{OA} = \vec{e}(\vec{e}\vec{i}) = \vec{e} \cos \varphi;$$

составляющей, перпендикулярной к оси поворота (рис. 58, б и в)

$$\vec{AD} = [\vec{i} - \vec{e}(\vec{e}\vec{i})];$$

составляющей, перпендикулярной к вектору  $\vec{i} - \vec{e}(\vec{e}\vec{i})$  (рис. 58, г)

$$\vec{BC} = \vec{e} \times \vec{i} \sin 2\varphi.$$

Таким образом, формулы, полученные на основе алгебры бикватернионов, имеют простое толкование на языке векторной алгебры, что видно из рис. 58.

Решим равенства (208) и (209) относительно неизвестных параметров ЗС:  $\vec{e}$ ,  $\varphi$ ,  $\varphi^\circ$  и  $r^0$ . Для нахождения орта  $\vec{e}$  оси поворота пространства умножим на него скалярно выражение (209) и получим

$$\vec{e}(\vec{i}' - \vec{i}) = \vec{e}(\vec{j}' - \vec{j}) = 0. \quad (210)$$

Этот результат очевиден, так как орт  $\vec{e}$  должен быть перпендикулярен как вектору  $(\vec{i}' - \vec{i})$ , так и вектору  $(\vec{j}' - \vec{j})$  и, следовательно, в которой они лежат. Из выражения (210) следует

$$\begin{aligned} \vec{e} &= \frac{(\vec{i}' - \vec{i}) \times (\vec{j}' - \vec{j})}{|(\vec{i}' - \vec{i}) \times (\vec{j}' - \vec{j})|} = \\ &= \frac{(\vec{i}' - \vec{i}) \times (\vec{j}' - \vec{j})}{\sqrt{4[1 - (\vec{i}'\vec{i})][1 - (\vec{j}'\vec{j})] - [(\vec{i}' - \vec{i}) - (\vec{j}' - \vec{j})]^2}}. \end{aligned} \quad (211)$$

Чтобы найти угол  $\varphi$ , умножим первое равенство (209) скалярно на  $\vec{i}$ , откуда

$$\vec{i}\vec{i}' = \cos 2\varphi + (\vec{e}\vec{i})^2 (1 - \cos 2\varphi); \quad (212)$$

$$\cos 2\varphi = \frac{(\vec{i}\vec{i}') - (\vec{e}\vec{i})^2}{1 - (\vec{e}\vec{i})^2} = 1 - \frac{1 - (\vec{i}'\vec{i})}{1 - (\vec{e}\vec{i})^2} \quad (213)$$

или

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{1 - (\vec{i}'\vec{i})}{2[1 - (\vec{e}\vec{i})^2]}}. \quad (214)$$

Формулы (213) или (214) определяют угол  $\varphi$ , орт  $\vec{e}$  вычисляется по формуле (211). Для определения  $\varphi^\circ$  умножим равенство (208) скалярно на  $\vec{e}$ , тогда  $\vec{e}\vec{O}O' = 2\varphi^\circ$ , откуда

$$\varphi^\circ = \frac{1}{2}(\vec{e}\vec{O}O'), \quad (215)$$

т. е. сдвиг происходит на значение проекции  $OO'$  на ось винта  $\vec{e}$ . Для определения  $\vec{r}^0$  умножим (208) векторно на  $\vec{e}$ :

$$\begin{aligned} \vec{e} \times \vec{O}O' &= (\vec{e} \times \vec{r}^0) (1 - \cos 2\varphi) + \vec{e} \times (\vec{r}^0 \times \vec{e}) \sin 2\varphi = \\ &= (\vec{e} \times \vec{r}^0) (1 - \cos 2\varphi) + \vec{r}^0 \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (216)$$

Подставляя в (216)  $\vec{e} \times \vec{r}^0$  из (208) и  $\varphi^\circ$  из (215), получаем

$$r^0 = \frac{1}{2}[\vec{O}O' - \vec{e}(\vec{e}\vec{O}O')] + (\vec{e} \times \vec{O}O') \operatorname{ctg} \varphi, \quad (217)$$

где из формул (213) и (214)

$$\operatorname{ctg} \varphi = \sqrt{\frac{2[1 - (\vec{e}\vec{i})^2]}{1 - (\vec{i}'\vec{i})}} - 1. \quad (218)$$

Формулы (212) — (217) определяют параметры ЗС при конгруэнтном преобразовании пространства.

Для ЗС с неконгруэнтным преобразованием формулы (215) и (217) неизменны, а в формулах (212) — (214) и (216) нужно заменить  $\vec{i}$  на  $-\vec{i}$  или  $\vec{j}$  на  $-\vec{j}$ . Когда параметры  $\vec{e}$ ,  $\varphi$ ,  $\varphi^\circ$ ,  $r^0$  известны, оператор в формуле (207) определяет винтовое перемещение пространства, переводящее тройку  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  с началом  $O$  в тройку  $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$  с началом  $O'$ . При этом происходит поворот вокруг оси винта  $\vec{e}$  на угол  $2\varphi$  и сдвиг вдоль оси винта на  $2\varphi^\circ$ , причем ориентация оси винта в пространстве определяется свободным ортом  $\vec{e}$ , положение оси в пространстве фиксируется радиус-вектором  $\vec{r}^0$ , перпендикулярным к оси, с началом в точке  $O$  и концом на оси винта.

Бикватернион по формуле (207) осуществляет преобразование пространства с оборачиванием и без оборачивания. ЗС с оборачиванием, осуществляющая такое преобразование, в общем случае имеет минимум три зеркала с некопланарными нормальными, пересекающимися в одной точке. Эта ЗС, приведенная к инвариантному виду, состоит из УЗ с угловым базисом  $\varphi$  и ребром  $\vec{e}$ , положение которого в пространстве фиксировано вектором  $\vec{r}^0$ , ортогональным к  $\vec{e}$ , с началом в точке  $O$  и концом на ребре УЗ и ОЗ, перпендикулярном к ребру УЗ, расположенного на расстоянии  $\varphi^\circ$  от точки  $O$ . Общий поворот пространства равен  $2\varphi + \pi$ .

Зеркальная система, осуществляющая преобразование вида (207), в общем случае содержит минимум четыре зеркала. Эта ЗС, приведенная к канонической форме, состоит из УЗ с угловым базисом  $\varphi$  и ребром  $\vec{e}$ , положение которого в пространстве фиксируется вектором  $\vec{r}^0$  так же, как было указано выше, и ЗР, перпендикулярного к ребру УЗ, с линейным базисом  $b$ .

Рассмотрим основные виды преобразований пространства на основе формулы (207). Как известно, всего имеется шесть видов преобразований, которые осуществляются шестью видами ЗС, и все эти виды представлены одной формулой (207) (см. табл. 2). В нее входят четыре параметра:  $\varphi$ ,  $\varphi^\circ$ ,  $\vec{e}$  и  $\vec{r}^0$ , которые отвечают двум видам ЗПС: с нечетным числом зеркал (ОЗ, ОЗ и ЗР, ОЗ и УЗ) и с четным числом зеркал (УЗ, ЗР и УЗ, ЗР).

Для тройного зеркала ОЗ и УЗ имеем:  $\varphi$  — угловой базис УЗ;  $\varphi^\circ$  — половина сдвига пространства — расстояние от начала координат до плоскости ОЗ;  $\vec{e}$  — направление ребра УЗ;  $\vec{r}^0$  — расстояние от ребра  $\vec{e}$  до начала системы координат. Для четверного зеркала УЗ и ЗР имеем:  $\varphi$  — угловой базис УЗ;  $b$  — линейный базис ЗР;  $\vec{e}$  —



орт ребра УЗ;  $\vec{r}^0$  — расстояние  $\vec{e}$  от начала системы координат. Для остальных четырех ЗС формула (207) упрощается и лишается тех или иных параметров в зависимости от вида ЗС.

Например, тройное зеркало с компланарными нормальными ОЗ и ЗР не имеет фиксированной оси вращения  $\vec{e}$  и, следовательно, вектора  $\vec{r}^0$ , но имеет свободный орт  $\vec{e}$ , который переходит в орт нормали  $\vec{n}$  ОЗ. Далее для ЗР в формуле (207) присутствуют только два параметра:  $\varphi^0 = b$  и  $\vec{e} = \vec{n}_1$  — орт первого зеркала ЗР. Для УЗ отсутствует  $\varphi^0$ , а для ОЗ имеем  $\varphi^0 = p$ ,  $\varphi = \pi/2$ , и  $\vec{e}$  переходит в  $\vec{n}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бранец А. И., Шмыглевский В. А. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. Герцбергер М. Современная геометрическая оптика. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 488 с.
3. Грейм И. А., Огурцов И. Е., Сочивко Е. Н. Эквивалентные тройные зеркала (с некомпланарными нормальями). — Изв. вузов. Приборостроение, т. XVI, 1973, № 3, с. 127—131.
4. Грейм И. А., Стендер П. В. Расчет систем плоских зеркал. Л.: Изд. СЗПИ, 1968. 111 с.
5. Грейм И. А., Шефтель М. Б. Бикватернионы в задачах расчета зеркально-призмных систем. — Изв. вузов. Приборостроение, 1977, № 11, с. 104—109.
6. Грейм И. А., Шефтель М. Б. Преобразование зеркально-призмных систем с применением бикватернионов. — Изв. вузов. Приборостроение, 1978, № 1, с. 82—86.
7. Грейм И. А., Шефтель М. Б. Синтез зеркально-призмных систем с применением бикватернионов. — Оптико-механическая промышленность, 1979, № 2, с. 18—20.
8. Грейм И. А., Зальц А. Е. Зеркально-призмные системы, их расчет и элементы юстировки. Л.: Изд. СЗПИ, 1978. 80 с.
9. Джеррард А., Бёрч Дж. М. Введение в матричную оптику. М.: Мир, 1978. 344 с.
10. Диментберг Ф. М. Теория винтов и ее приложение. М.: Наука, 1978. 328 с.
11. Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973. 144 с.
12. Кожевников Ю. Г. Оптические призмы. М.: Машиностроение, 1975. 192 с.
13. Лебедев И. В. О некоторых свойствах систем плоских зеркал. — Тр. Института физики и математики АН БССР, 1956, вып. 1. 124 с.
14. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Изд-во АН СССР, 1961. 828 с.
15. Мальцев М. Д. Расчет допусков на оптические детали. М.: Машиностроение, 1974. 168 с.
16. Погарев Г. В. Юстировка оптических приборов. Л.: Машиностроение, 1968. 264 с.
17. Погарев Г. В. Оптические юстировочные задачи. Л.: Машиностроение, 1974. 224 с.
18. Потепун В. Е. О представлении в кватернионной форме про-

- хождения лучей через систему оптических поверхностей. — Расчет, конструирование и исследование точности оптических систем, 1976, вып. 84, с. 42—46 (Тр. ЛИТМО).
19. Потепун В. Е. О применении кватернионов в геометрической оптике. — Расчет, конструирование и исследование точности оптических систем, 1976, вып. 84, с. 36—42 (Тр. ЛИТМО).
  20. Пошихонов Б. Л. Графоаналитическая геометрия в применении к оптическим задачам. Л.: Машиностроение, 1967. 158 с.
  21. Русинов М. М. Юстировка оптических приборов. М.: Недра, 1969. 326 с.
  22. Русинов М. М. Габаритные расчеты оптических систем. М.: Госгеолтехиздат, 1963. 400 с.
  23. Сивцов Г. П. О преобразовании векторов оптической системой из трех плоских зеркал. — Оптико-механическая промышленность, 1977, № 1, с. 25—27.
  24. Справочник конструктора оптико-механических приборов / М. Я. Кругер, В. А. Панов, Г. В. Погарев, В. В. Кулагин и др. М.: Машиностроение, 1968. 760 с.
  25. Сухопаров С. А. Сборка и юстировка морских оптических дальномеров. М.: Оборонгиз, 1961. 180 с.
  26. Тудоровский А. И. Система из четырех плоских зеркал. — Оптико-механическая промышленность, 1956, № 1, с. 16—22.
  27. Тудоровский А. И. Теория оптических приборов. ч. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1948. 464 с.
  28. Чуриловский В. Н. Теория оптических приборов. Л.: Машиностроение, 1966. 564 с.
  29. Чуриловский В. Н., Халилулин К. А. Теория и расчет призмённых систем. Л.: Машиностроение. Ленинград. отд-ние, 1979. 272 с.
  30. Ball R. A. Treatise on the Theory of the Serems. Dublin, 1874.
  31. Banerschmidt. Die Bestimmung des Bildes und der Bildabwanderung bei Verlagerung in sich starrer Planspiegelfolgen. — Feingerätetechnik, 1965, N. 2, S. 24—32.
  32. Beggs J. S. Advanced Mechanism Macmillan Co, N—V—London, 1966, p. 246.
  33. Brauer. Über die Systeme von Planspiegeln. — Optik, 1948, N. 1, S. 64—72.
  34. Kaspar E. Revue d'Optique, 1948, 27, N. 1 p. 15.
  35. Clifford W. Preliminary Scetch of Biquater—nions, Proc., of London Mathem. Soc. 1973, IV, pp. 381—393.
  36. Rosenhagen. — Instrumentaloptik. — Optik, 1950, N 3, S. 32—38.
  37. Wagner H. Mathematische Betrachtung von Spiegelungen. — Optik, 1951, N 10, S. 456—472.

---

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Введение . . . . .	5
<b>ГЛАВА I. Общие сведения о применяемых математических методах расчета зеркально-призмennых систем . . . . .</b>	<b>8</b>
1. Основные виды задач при расчетах зеркальных систем . . . . .	8
2. Характер действия зеркально-призмennых систем . . . . .	11
3. Элементы векторной алгебры . . . . .	14
4. Матричный метод . . . . .	19
5. Сферическая и комплексная сферическая тригонометрия . . . . .	21
6. Метод конечных поворотов твердого тела и кватернионов . . . . .	22
7. Методы винтов и бикватернионов . . . . .	25
<b>ГЛАВА 2. Линейные преобразования плоскости и пространства . . . . .</b>	<b>28</b>
1. Линейное преобразование плоскости . . . . .	28
2. Линейное преобразование пространства в векторной форме . . . . .	30
3. Линейные преобразования пространства и матрицы . . . . .	32
4. Ортогональные преобразования пространства . . . . .	33
5. Вырожденное и невырожденное преобразование пространства . . . . .	34
6. Растяжение (сжатие) пространства в направлении координатной оси . . . . .	37
7. Правила преобразования систем координат . . . . .	39
8. Операторы действия элементарных зеркальных систем . . . . .	42
9. Операторы преобразования пространства в матричном виде . . . . .	47
10. Основные свойства элементарных зеркальных систем . . . . .	51

<b>ГЛАВА 3. Приведение трех зеркальных систем к простейшим видам . . . . .</b>	<b>57</b>
1. Понятие об инвариантности зеркальных систем . . . . .	57
2. Классификация систем плоских зеркал . . . . .	59
3. Тройные зеркала, состоящие из одиночного и углового зеркал . . . . .	62
4. Параллельный перенос пространства зеркальной системой . . . . .	68
5. Зеркальная система, состоящая из зеркального ромба и одиночного зеркала . . . . .	71
6. Отыскание эквивалентной (инвариантной) трехзеркальной системы с измененным базисом зеркального ромба . . . . .	75
7. Зеркальная система, состоящая из углового и одиночного зеркал (с компланарными нормальными) . . . . .	76
8. Методика замены зеркальных систем из печетного числа отражающих поверхностей с компланарными нормальными эквивалентной системой . . . . .	79
<b>ГЛАВА 4. Четверные зеркала . . . . .</b>	<b>83</b>
1. Замена двух угловых зеркал с пересекающимися ребрами одним угловым зеркалом . . . . .	84
2. Замена двух угловых зеркал со скрещивающимися ребрами зеркальным ромбом и угловым зеркалом . . . . .	86
3. Представление углового зеркала в виде двух ему эквивалентных угловых зеркал . . . . .	88
4. Изменение последовательности расположения двух угловых зеркал . . . . .	90
5. Изменение последовательности расположения углового зеркала и зеркального ромба . . . . .	92
6. Изменение последовательности расположения зеркальных ромбов и угловых зеркал с коллинеарными ребрами . . . . .	97
<b>ГЛАВА 5. Кватернионы и бикватернионы в задачах анализа и синтеза систем плоских зеркал . . . . .</b>	<b>100</b>
1. Кватернионы в задачах анализа зеркальных систем . . . . .	100
2. Операторы действия зеркальных систем в кватернионном виде . . . . .	103
3. Применение кватернионов при преобразовании радиус-векторов точек . . . . .	105
4. Общие свойства бикватернионов . . . . .	106
5. Представление движений пространства с помощью бикватернионов . . . . .	108
6. Оператор действия одиночного зеркала в бикватернионном виде . . . . .	110

7. Операторы действия углового зеркала и зеркального ромба в бикватернионном виде . . . . .	110
8. Оператор действия тройного зеркала в бикватернионном виде . . . . .	112
9. Бикватернионные операторы действия четверных зеркал . . . . .	113
10. Синтез систем плоских зеркал с применением бикватернионов . . . . .	115
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>121</b>

ИБ № 2621

**Игорь Александрович Грейм**

**ЗЕРКАЛЬНО-ПРИЗМЕННЫЕ СИСТЕМЫ**

---

Редактор *З. С. Баранова*

Художественный редактор *С. С. Водчиц*

Технический редактор *И. Н. Раченкова*

Корректор *Л. Л. Георгиевская*

---

Сдано в набор 26.02.81. Подписано в печать 08.06.81. Т-08783. Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>.  
Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая.  
Усл. печ. л. 6,72. Уч.-изд. л. 7,20. Тираж 2900 экз. Заказ № 297. Цена 35 к.

---

Издательство «Машиностроение», 107076, Москва, Б-76, Стромьинский пер., д. 4.

---

Московская типография № 32 Союзполиграфпрома при Государственном  
комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.  
Москва, 103051, Цветной бульвар, 26.

**НОВЫЕ КНИГИ**  
**по приборостроению**

*Выпуск 1982 года*

Андреев А. А. Автоматические электронные показывающие, регистрирующие и регулирующие приборы. 2-е изд., перераб. и доп. Л., 19 л., ил.

Атлас конструкций элементов приборных устройств: Учеб. пособие для студентов приборостроительных специальностей вузов / О. Ф. Тищенко, А. А. Буцев и др.: Под ред. О. Ф. Тищенко. М., 26 л., ил.

Балдин А. А., Бошняк Л. Л., Соловский В. М. Ротаметры. Л., 15 л., ил.

Берендс Д. А., Кукулиев Р. М., Филиппов К. К. Приборы и системы автоматического управления с широтно-импульсной модуляцией. Л., 19 л., ил. В пер.: 1 р. 10 к.

Бугров А. В. Высокочастотные емкостные преобразователи и приборы контроля качества. М., 12 л., ил. (Б-ка приборостроителя).

Буловский Л. И., Зауэр В. Технология элементов электронной аппаратуры. Л., 19 л., ил.

Дискретные средства преобразования и сбора измерительной информации / А. А. Абдуллаев, И. А. Набиев, М. Ш. Гусейнов и др. — М., 12 л., ил. (Б-ка приборостроителя).

Жиглинский А. Г., Кучинский В. В. Реальный интерферометр Фабри—Перо. Л., 12 л., ил.

*Своевременно заказывайте и приобретайте новые книги издательства «Машиностроение» в магазинах, распространяющих техническую литературу.*



**НОВЫЕ КНИГИ**  
**по приборостроению**

*Выпуск 1982 года*

Киясбейли А. Ш., Лившиц П. М. Расходы жидкости с овальными шестернями. М., 10 л., ил. (Б-ка приборостроителя).

Королев М. В., Карпельсон А. Е. Широкополосные пьезопреобразователи для ультразвуковой контрольно-измерительной аппаратуры. М., 10 л., ил. (Б-ка приборостроителя).

Коротков В. П., Карцев Е. Д., Унифицированные струнные измерительные преобразователи. М., 10 л., ил. (Б-ка приборостроителя).

Кремлевский П. П. Измерение расхода многофазных потоков. Л., 18 л., ил.

Кулагин В. В. Основы конструирования оптических приборов: Учеб. пособие для вузов. Л., 21 л., ил.

Левин В. И. Пневматические элементы и устройства релейной автоматики. М., 12 л., ил. (Б-ка приборостроителя).

Маквцов Е. Н., Тартаковский А. М. Дискретные модели приборов. — М., 9 л., ил. (Б-ка приборостроителя).

Михнев Р. А., Штандель С. К. Оборудование оптических цехов: Учебник для оптико-механических и приборостроительных техникумов. М., 25 л., ил.

Погарев Г. В. Юстировка оптических приборов. 2-е изд., перераб. и доп. Л., 18 л., ил.

*Своевременно заказывайте и приобретайте новые книги издательства «Машиностроение» в магазинах, распространяющих техническую литературу.*

35 коп.



«МАШИНОСТРОЕНИЕ»